

SEMAINE 15

du 29 janvier au 2 février 2024

► Polynômes

- notion de polynôme à une indéterminée sur un corps $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, structure d'anneau intègre sur $\mathbb{K}[X]$, inversibles, composition, degré ;
- polynômes multiples, diviseurs d'un autre polynôme, relation " $|$ " et division euclidienne sur $\mathbb{K}[X]$;
- pgcd, ppcm, algorithme d'Euclide sur $\mathbb{K}[X]$;
- théorèmes de Bézout et Gauss ;
- l'ensemble $\mathbb{K}[x]$ des fonctions polynomiales sur \mathbb{K} est en bijection avec $\mathbb{K}[X]$;
- évaluation d'un polynôme P en un point a via sa fonction polynomiale associée, notation (abusive) $P(a)$;
- racines d'un polynôme, tout polynôme admet au plus un nombre de racines égal à son degré ;
- $a \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si $X - a$ divise P ;
- dérivée formelle d'un polynôme, extension des formules usuelles (somme, produit, composée), degré du polynôme dérivé ;
- formule de Taylor ;
- caractérisation des racines multiples par les points d'annulation des dérivées successives ;
- notion de polynôme irréductible ;
- tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit de façon unique (à l'ordre près des facteurs) comme produit d'irréductibles ;
- théorème de d'Alembert–Gauss, classification des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$;
- caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ par la multiplicité des racines ;
- classification des polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$;
- interpolation de Lagrange.

✘ *Aucune connaissance n'est exigible des étudiant.e.s sur les sujets suivants : construction de $\mathbb{K}[X]$, polynômes sur un corps fini.*

► Questions de cours (démonstrations)

- tout énoncé ou définition est exigible ;
- lemme de Gauss ;
- $a \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si $X - a$ divise P ;
- si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est racine de $P \in \mathbb{R}[X]$, alors \bar{a} l'est également ;
- existence et unicité du polynôme interpolateur de Lagrange.

◆ Exercices CCINP : 85, 87.