

SEMAINE 17
du 26 février au 1^{er} mars 2024

► Analyse asymptotique

- comparaison de deux fonctions au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$: domination (notée $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \mathcal{O}(g(x))$), négligeabilité (notée $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$) et équivalence (notée $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$);
- caractérisation par le quotient dans le cas où l'une des fonctions ne s'annule pas au voisinage de a , $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x))$;
- transitivité de \mathcal{O} et o , \sim est une relation d'équivalence, reformulation des croissances comparées;
- opération sur les relations de comparaison;
- équivalence et limite finie en un point, comparaison du signe de deux fonctions équivalentes au voisinage d'un point;
- cas particulier de la comparaison des suites : domination (notation $u_n = \mathcal{O}(v_n)$), négligeabilité (notation $u_n = o(v_n)$), équivalence (notation $u_n \sim v_n$);
- utilisation des croissances comparées pour lever des indéterminations sur les limites;
- notion de développement limité (DL) en un point de \mathbb{R} , unicité du DL si il existe, cas des fonctions paires et impaires;
- une fonction f admet un DL à l'ordre 0 (resp. à l'ordre 1) en un point si et seulement si elle y est continue (resp. dérivable);
- formule de Taylor–Young pour les fonctions de classe \mathcal{C}^n au voisinage d'un point de \mathbb{R} ;
- DL à tout ordre en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, \exp , \cos , \sin , ch , sh et \arctan ;
- DL à l'ordre 3 en 0 de \tan ;
- caractérisation des extrema locaux à l'aide du signe du coefficient d'ordre 2 dans un DL;
- opérations sur les DL (*pour usage pratique : aucun énoncé précis n'est exigible*) : combinaisons linéaires, produit, composée, quotient;
- DL d'une primitive;
- notion de développement asymptotique en un point de $\overline{\mathbb{R}}$, application à l'étude des asymptotes et de leur position relativement à une courbe;
- formule de Stirling.

✘ *Aucune connaissance n'est exigible des étudiant·e·s sur les sujets suivants : formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor–Lagrange, division selon les puissances croissantes, échelles de comparaison.*

► Questions de cours (démonstrations)

- tout énoncé ou définition est exigible.

◆ Exercices CCINP : 1, 46.1).