

SEMAINE 19

du 11 au 15 mars 2024

► Espaces vectoriels (2)

► *Reprise du programme précédent.*

- familles libres (et liées), familles génératrices, bases ;
- une famille $(f_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si pour toute famille **presque nulle** $(\lambda_i)_{i \in I}$ de scalaires on a

$$\left(\sum_{i \in I} \lambda_i f_i = 0 \right) \Rightarrow (\forall i \in I, \lambda_i = 0) ;$$

- toute famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre ;
- caractérisation des bases comme familles libres maximales et familles génératrices minimales ;
- l'image par une application linéaire injective (resp. surjective) d'une famille libre (resp. génératrice) est libre (resp. génératrice) ;
- caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijektivité d'une application linéaire par l'image d'une base ;
- **une application linéaire est totalement déterminée par l'image d'une base de son espace de départ ;**
- somme de **deux** s.e.v, notion de somme directe (notation \oplus) ;
- caractérisation de la somme directe de **deux** sous-espaces à l'aide de leur intersection ;
- sous-espaces supplémentaires ;
- projecteurs sur un s.e.v parallèlement à un autre, caractérisation à l'aide de l'image et du noyau ;
- symétries par rapport à un s.e.v parallèlement à un autre, caractérisation à l'aide de deux s.e.v supplémentaires.
- hyperplans (définis comme noyau d'une forme linéaire non nulle), caractérisation par leur supplémentaire.

✘ *Aucune connaissance n'est exigible des étudiants sur les sujets suivants : dimension, symétries et projecteurs orthogonaux, dualité.*

► Questions de cours (*démonstrations*)

- tout énoncé ou définition est exigible ;
- la composée de deux applications linéaires est linéaire ;
- l'inverse d'une bijection linéaire est linéaire ;
- l'intersection de deux s.e.v d'un même e.v en est un s.e.v ;
- deux s.e.v sont en somme directe si et seulement si leur intersection est nulle ;
- si \mathcal{F} est une famille de vecteurs et f une application linéaire, alors $f(\text{Vect}(\mathcal{F})) = \text{Vect}(f(\mathcal{F}))$;
- l'image par une application linéaire injective (resp. surjective) d'une famille libre (resp. génératrice) est libre (resp. génératrice).

◆ **Exercices CCINP : 55 (hors 1)b), 62.1), 62.2)b), 85, 90.**