

Ce devoir est à rendre pour le lundi 18 septembre 2023.

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.

NOMBRES DE FIBONACCI ET DAMIERS

On considère un damier de taille $2 \times n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, que l'on souhaite recouvrir par des pièces de taille 1×2 placées horizontalement ou verticalement. On note a_n le nombre de tels recouvrement possibles.

1. Déterminer a_1 , a_2 et a_3 .
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
3. On note ϕ et $\bar{\phi}$ les racines, classées par ordre décroissant, de l'équation $x^2 = x + 1$.
 - (a) Déterminer ϕ et $\bar{\phi}$.
 - (b) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n+1} - \bar{\phi}^{n+1}).$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on pose

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{n+1} - a_n.$$

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.