Ce devoir est à rendre pour le lundi 16 octobre 2023.

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.

Fonctions indicatrices

Dans tout ce devoir, on fixe un ensemble E quelconque. On rappelle que si $A \in \mathscr{P}(E)$, l'indicatrice de A est la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} . \end{aligned}$$

1. Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$; démontrer que :
   (a) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$;
   (b) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$;
   (c) $\mathbb{1}_{B\setminus A} = \mathbb{1}_B(\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A)$;
   (d) $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
2. On considère l'ensemble $\mathscr{F} = \mathscr{F}(E, \{0,1\})$ des applications de E dans $\{0,1\}$.
   (a) Lister les éléments de $\mathscr{F}$ dans le cas où $E = \{0,1\}$.
   (b) Démontrer que si E contient strictement plus de deux éléments, $\mathscr{F}$ ne contient aucune bijection.
3. (a) Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$; démontrer que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B$.
   (b) Soit $f \in \mathscr{F}$; montrer qu'il existe $A \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f = \mathbb{1}_A$.
   (c) En déduire que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{P}(E) &\to \mathscr{F} \\ A &\mapsto \mathbb{1}_A \end{aligned}$$

   est une bijection.