Ce devoir est à rendre pour le lundi 8 janvier 2024.

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.

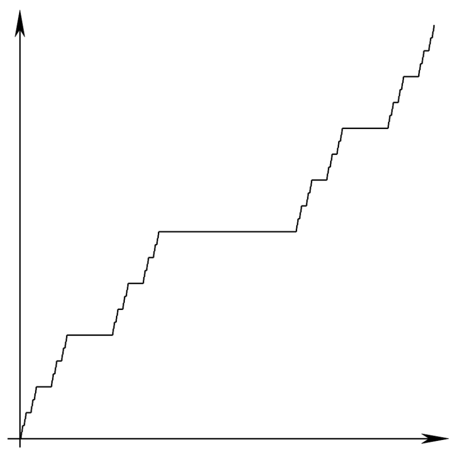
♦ Exercice : extrait CCINP MP 2020

On note f_0 la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_0 : x \mapsto x$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose ensuite :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(3x)}{2} & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right[\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right[\\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{f_n(3x-2)}{2} & \text{si } x \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right] \end{cases} .$$

1. (a) Donner une expression explicite des fonctions f_1 et f_2. ***Indication*** *: pour f_2, on découpera l'ensemble $[0,1]$ en sept sous–intervalles.*
   (b) Représenter l'allure des courbes de f_0, f_1 et f_2 **sur trois graphiques différents**.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est à valeurs dans $[0,1]$.
3. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1], \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3 \times 2^{n+1}} .$$
   Indication *: on pourra différencier des cas selon la valeur de x.*
4. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, démontrer l'existence de la quantité
$$u_n = \sup\{\, |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \mid x \in [0,1]\} .$$
   (b) Justifier que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \frac{1}{3 \times 2^{n+1}} .$$
   (c) Que peut–on en déduire sur la suite $(u_n)_n$?
5. (a) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que les fonctions f_n sont croissantes et continues sur le segment $[0,1]$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant les valeurs de $f_n(0)$ et $f_n(1)$, déduire de ce qui précède que f_n est une fonction surjective de $[0,1]$ sur lui–même.

On peut démontrer que les fonctions f_n "convergent" (en un sens que vous étudierez en MP) vers une fonction parfois appelée "escalier du diable", croissante, continue et surjective sur $[0,1]$.



⧫ Problème : théorème de Weierstrass, version faible

L'objet de ce problème est la démonstration du théorème suivant, démontré en premier lieu par Karl Weierstrass en 1885. Nous nous inspirons ici d'une méthode constructive due à Sergeï Natanovich Bernstein [1] et datant de 1912.

Théorème 1 (Weierstrass *(version faible)*)**.**

> *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe une suite $(P_n)_n$ de fonctions polynomiales telle que :*
>
> $$\forall x \in [0,1], \quad P_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \ .$$

☞ *On rappelle qu'une fonction polynomiale est une fonction de la forme*

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_d x^d, \quad \textit{avec } a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}.$$

Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$ on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \ .$$

Ceci signifie que $B_n(f)$ est la **fonction** qui à $x \in [0,1]$ associe le **réel** $B_n(f)(x)$ défini ci–dessus. On pose également, pour $x \in [0,1]$ et $i \in \mathbb{N}$, $\phi_i(x) = x^i$.

✖ On manipule dans ce problème différents types d'objets : fonctions, suites, nombres réels. Il est donc **impératif** de soigner la rédaction et de prendre garde à quantifier et homogénéiser les expressions présentées. Tout manquement à cette règle sera ***lourdement*** sanctionné.

– I –

1. Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$ et $n \geq 1$; justifier que $B_n(f)$ est une fonction polynomiale.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathscr{C}^0([0,1])$. Démontrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   (a) $B_n(af + bg) = aB_n(f) + bB_n(g)$;
   (b) $(f \geq 0) \Rightarrow (B_n(f) \geq 0)$;
   (c) $(f \geq g) \Rightarrow (B_n(f) \geq B_n(g))$;
   (d) $|B_n(f)| \leq B_n(|f|)$.
3. Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$ et soit $n \geq 1$.
   (a) Justifier que la fonction $B_n(f)$ est dérivable.
   (b) Démontrer que si l'on pose $g : x \mapsto xf(x)$ on a, pour tout $x \in [0,1]$:
   $$\frac{x(1-x)}{n} B_n'(f)(x) = B_n(g)(x) - xB_n(f)(x) \ .$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $B_n(\phi_0) = \phi_0$.
   (b) Que dire de $B_n(\phi_1)$?
   (c) Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$:
   $$B_n(\phi_2)(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

1. À ne pas confondre avec *Felix* Bernstein, mathématicien allemand et contemporain de l'autre, rencontré lors du DS 3.

– II –

On fixe dans cette partie une fonction $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$. Notre but est ici de démontrer le résultat suivant [2] :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in [0,1], \quad (|x-y| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)\ .$$

1. Expliquer en quoi ce résultat est différent de la définition de continuité appliquée à la fonction f.
2. Écrire la négation du résultat voulu. *Nous allons à présent le démontrer par l'absurde.*
3. Démontrer que si l'on suppose le résultat faux, il existe un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_n, (y_n)_n$ d'éléments de $[0,1]$ tels que

$$\forall n \geq 1, \qquad \left(|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}\right) \wedge (|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon)\ .$$

4. (a) Montrer qu'il existe une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers un nombre réel ℓ.
   (b) Justifier que $\ell \in [0,1]$.
   (c) Démontrer que la suite $(y_{\varphi(n)})_n$ converge également vers ℓ.
   (d) Déterminer la limite, quand n tend vers l'infini, de la quantité $|f(y_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})|$.
5. Conclure.

– III –

On fixe dans cette partie une fonction $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$ et un réel $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Justifier qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [0,1], \quad (|x-y| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)\ .$$

2. Montrer que l'ensemble $\mathscr{F} = \{|f(x)| \,|\, x \in [0,1]\}$ admet un plus grand élément, que l'on notera M.
3. On pose $K = \dfrac{2M}{\delta^2}$. Démontrer que, pour tous $x, y \in [0,1]$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq K(x-y)^2 + \varepsilon$$

4. Fixons $y \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$

$$|f(x) - f(y)\phi_0(x)| \leq K(\phi_2(x) - 2y\phi_1(x) + y^2\phi_0(x)) + \varepsilon\phi_0(x)\ .$$

   (b) En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$

$$|B_n(f)(x) - f(y)B_n(\phi_0)(x)| \leq K(B_n(\phi_2)(x) - 2yB_n(\phi_1)(x) + y^2 B_n(\phi_0)(x)) + \varepsilon B_n(\phi_0)(x)\ .$$

   (c) Pour conclure, montrer que

$$|B_n(f)(y) - f(y)| \leq \frac{K}{4n} + \varepsilon\ .$$

5. (a) Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $B_n(f)(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.
   (b) En déduire le théorème de Weierstrass.

2. Cas particulier d'un résultat du à Eduard Heine (1821–1881).