Ce devoir est à rendre pour le lundi 5 février 2024.

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.

♦ Polynômes interpolateurs (adapté de CCINP MP 2018)

Commençons par fixer deux réels a, b tels que $a < b$ et une fonction $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$. On se donne ensuite n points $x_0, \dots, x_n$ deux à deux distincts de $[a,b]$.

On appellera **polynôme interpolateur** de f aux points $x_0, \dots x_n$ tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
(PI-1) $P \in \mathbb{R}_n[X]$ (*i.e* $\deg(P) \leq n$) ;
(PI-2) $\forall\, i \in [\![0,n]\!],\ P(x_i) = f(x_i)$.

Il est interdit dans les parties I et II de faire usage de tout résultat de cours relatif aux polynômes de Lagrange. La partie II est à considérer comme une question de cours.

– I –

1. (a) Parmi les trois polynômes ci–ensuite, un seul est interpolateur de la fonction sinus en 0 et $\frac{\pi}{2}$. Lequel (justifier, évidemment) ?

$$P = X\left(X - \frac{\pi}{2}\right), \quad Q = \frac{2}{\pi}X, \quad R = \frac{4}{3\pi^2}X(2\pi - X)\,.$$

   (b) Donner un polynôme interpolateur de la fonction exponentielle aux points 0 et 1.
2. (a) Démontrer que le polynôme interpolateur de f, lorsqu'il existe, est unique.
   (b) Cette unicité est-elle préservée si on supprime la condition **(PI-1)** ? Pourquoi ?
3. (a) Démontrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $\forall\, i \in [\![0,n]\!],\ Q(x_i) = 0$.
   (b) Que dire du polynôme interpolateur de Q aux points $x_0, \dots x_n$?

– II –

Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on appelle i**–ième polynôme de Lagrange associé à** f **et aux points** $x_0, \dots x_n$ le polynôme

$$L_i = \prod_{k \neq i} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}\,.$$

On pose également

$$L_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i\,.$$

1. Vérifier que

$$\forall\, i, j \in [\![0,n]\!], \quad L_i(x_j) = \delta_{i,j}\,,$$

   où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker associé à i et j.
2. Démontrer que $L_n(f)$ est le polynôme interpolateur de f aux points $x_0, \dots x_n$.

– III –

On suppose dans cette partie que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur le segment $[a,b]$. De plus, on pose $\Lambda = \{x_0, \dots, x_n\}$ et

$$\pi_\Lambda = \prod_{i=0}^{n} (X - x_i)\,.$$

L'objectif de cette partie est de démontrer la propriété suivante, pour tout $x \in [a,b]$:

$$(\mathscr{P}_x) \qquad \exists\, c_x \in]a,b[,\ f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\Lambda(x)\,.$$

1. Rappeler la définition de l'ensemble $\mathscr{C}^{n+1}([a,b])$.
2. Justifier que $(\mathscr{P}_x)$ est vraie pour tout $x \in \Lambda$.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction p fois dérivable qui s'annule $p+1$ fois.
   (a) Démontrer par récurrence sur $k \in [\![0,p]\!]$, la fonction $\phi^{(k)}$ s'annule au moins $p+1-k$ fois.
   (b) En déduire qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\phi^{(p)}(c) = 0$. Ensuite, relire la question pour se rendre compte que l'on a oublié de démontrer que c est bien compris dans l'intervalle $]a,b[$ avec les crochets **ouverts**. Corriger cette erreur.
4. **Fixons** désormais $x \in [a,b]$ tel que $x \notin \Lambda$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit alors :

$$F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \mapsto f(t) - L_n(f)(t) - \lambda \pi_\Lambda(t) \quad .$$

   (a) Démontrer que $F \in \mathscr{C}^{n+1}([a,b])$ et que

$$\forall\, t \in [a,b], \quad F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \lambda(n+1)!\ .$$

   (b) Déterminer un réel λ tel que $F(x) = 0$.

   On supposera désormais λ fixé de telle sorte que $F(x) = 0$.

   resume Justifier que F s'annule $n+2$ fois.

   resume Déduire de tout ceci que la propriété $(\mathscr{P}_x)$ est vraie.

– IV –

On conserve dans cette partie les hypothèses et notations du III.

1. Démontrer l'existence des deux quantités suivantes :

$$\|f^{(n+1)}\|_\infty = \max\{|f^{(n+1)}(t)| \mid t \in [a,b]\}\ .$$

   et

$$\|f - L_n(f)\|_\infty = \max\{|f(t) - L_n(f)(t)| \mid t \in [a,b]\}\ .$$

2. Démontrer, à l'aide du résultat de la partie III et de ce qui précède, que

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leq \frac{(b-a)^{n+1}]}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty$$