Ce devoir est à rendre pour le lundi 26 février 2024.

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.

♦ Formes linéaires, orthogonalité

L'objectif de ce problème est l'étude du dual de certains espaces vectoriels. On rappelle, à toutes fins utiles, que si E est un $\mathbb{K}$–e.v, son **dual** E^* est l'ensemble $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires sur E.

– I –

Pour chacune des applications suivantes, démontrer qu'il s'agit d'une forme linéaire et déterminer son noyau ainsi que son image.

1.
$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^3 &\to \mathbb{K} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto x + y - 3z \ ; \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} g : \mathbb{K}[X] &\to \mathbb{K} \\ P &\mapsto P(\pi) \ ; \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} h : \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t \ . \end{aligned}$$

– II –

Soit E un $\mathbb{K}$–e.v quelconque. On dira dans cette partie qu'un vecteur $x \in E$ et une forme linéaire φ sont **orthogonaux** si $\varphi(x) = 0$.

1. Soit $A \subset E$; on appelle **orthogonal** de A l'ensemble
$$A^\perp = \{\varphi \in E^* \,|\, \forall x \in A,\ \varphi(x) = 0\} \ .$$
   (a) Démontrer que $A^\perp$ est un s-e.v de E^*.
   (b) Déterminer $\{0\}^\perp$ et $E^\perp$.
   (c) Montrer que si A' est une partie de de E telle que $A' \subset A$, alors $A^\perp \subset (A')^\perp$.
   (d) Démontrer que $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.
2. Soit $B \subset E^*$; on appelle **orthogonal** de B l'ensemble
$$B^\circ = \{x \in E \,|\, \forall \varphi \in B,\ \varphi(x) = 0\} \ .$$
   (a) Démontrer que B° est un s-e.v de E.
   (b) Soit $\varphi \in E^*$. Que dire de $\{\varphi\}^\circ$?
   (c) Déterminer $\{0\}^\circ$ et $(E^*)^\circ$.
   (d) Montrer que si B' est une partie de E^* telle que $B' \subset B$, alors $B^\circ \subset (B')^\circ$.
   (e) Démontrer que $B^\circ = \mathrm{Vect}(B)^\circ$.