Ce devoir est à rendre pour le lundi 25 mars 2024.

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.

♦ Autour de la trace d'une matrice carrée

Dans tout ce problème partie, E représente l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées $n \times n$ sur $\mathbb{K}$. On notera $(E_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ la base canonique de cet espace. Étant donnée une matrice $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in E$, on appelle **trace** de A le scalaire

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

obtenu en sommant ses coefficients diagonaux. On posera également $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

– I –

1. Démontrer que l'application $A \mapsto Tr(A)$ est une forme linéaire sur E.
2. (a) Justifier que $\ker(\mathrm{Tr})$ est un hyperplan de E.
   (b) Déterminer $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})$.
3. On pose $A = \{E_{i,j} \mid i, j \in [\![1, n]\!],\ i \neq j\}$, $B = \{E_{i,i} - E_{1,1} \mid i \in [\![1, n]\!]\}$. Démontrer que

$$\ker(\mathrm{Tr}) = \mathrm{Vect}(A \cup B)\,.$$

– II –

1. Démontrer que, pour tous $i, j, k, \ell \in [\![1, n]\!]$, on a $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$.
2. Soit $A \in E$; on pose

$$\begin{aligned} f_A : E &\to \mathbb{K} \\ M &\mapsto \mathrm{Tr}(AM)\,. \end{aligned}$$

   (a) Montrer que $f_A \in E^*$.
   (b) Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$; démontrer que

$$f_A(E_{i,j}) = a_{j,i}\,,$$

   où $a_{j,i}$ est le coefficient situé ligne j et colonne i dans la matrice A.
   (c) En déduire que si f_A est l'application nulle, alors A est la matrice nulle.
3. En s'aidant de la question précédente, démontrer que l'application

$$\begin{aligned} f : E &\to E^* \\ A &\mapsto f_A \end{aligned}$$

   est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
4. Soit $\phi \in E^*$ une forme linéaire telle que

$$\forall\, M, N \in E, \quad \phi(MN) = \phi(NM)\,.$$

   (a) Justifier qu'il existe un unique $A \in E$ tel que $\phi = f_A$.
   (b) Démontrer que pour tout $M \in E$, f_{AM-MA} est l'application nulle. Qu'en conclure quant aux matrices AM et MA ?
   (c) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda \mathrm{I}_n$.
   (d) Conclure en justifiant que $\phi = \lambda\mathrm{Tr}$.

– III –

Dans cette partie, on considère un sous–groupe fini G de $GL_n(\mathbb{K})$. On pose :

$$F = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \,|\, \forall M \in G,\, MX = X\} \,.$$

1. Démontrer que F est un s-e.v de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. Soit $M \in E$ telle que $M^2 = M$. Démontrer que l'application $u : X \mapsto MX$ est un projecteur appartenant à $\mathscr{L}(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$.

On admettra que $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{rg}(u)$**.**

3. En déduire le résultat suivant, appelé *formule de Burnside* :

$$\dim(F) = \frac{1}{\mathrm{card}(G)} \sum_{M \in G} \mathrm{Tr}(M) \,.$$

Indication : on pourra considérer l'application définie sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ par :

$$v : X \mapsto \frac{1}{\mathrm{card}(G)} \sum_{M \in G} MX \,.$$