Ce devoir est à rendre pour le lundi 22 avril 2024.

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.

♦ Exercice 1 : extrait E3A PC 2019

1. Rappeler sans démonstration pour quelles valeurs du réel α la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
   $$S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}\,.$$
   Vérifier que la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et divergente.
   (b) Montrer qu'il existe au moins un entier naturel p tel que l'on ait :
   $$\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} > 1\,.$$

On note alors $a_n = n+p_n$ où p_n est le plus petit entier p vérifiant cette propriété. Ceci entraîne en particulier que :
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} > 1\,.$$

3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?
4. Prouver pour $n \geq 2$ que l'on a :
   $$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < 1$$
   et
   $$\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} > 1\,.$$
5. Montrer que si la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite ℓ, alors $\ell \in [2,3]$.
6. Prouver que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :
   $$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{a_n}\,.$$
7. Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :
   $$1 - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} \leq 1\,.$$
8. En déduire que la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

⧫ Exercice 2 : théorème de réarrangement de Riemann

On se donne dans cet exercice une série **réelle** $\sum u_n$ *semi–convergente*, *i.e* telle que :

— la série $\sum u_n$ converge ;

— la série $\sum |u_n|$ **ne converge pas**.

On rappelle que pour tout nombre réel x, on pose $x^+ = \max(0, x)$ et $x^- = \max(0, -x)$. On a alors $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

1. Donner (en justifiant) un exemple de série semi–convergente.
2. Justifier que les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ divergent.
3. (a) Vérifier que les ensembles $U^+ = \{n \in \mathbb{N} \,|\, u_n > 0\}$ et $U^- = \{n \in \mathbb{N} \,|\, u_n \leq 0\}$ forment une partition de $\mathbb{N}$.
   (b) Démontrer que ces ensembles sont tous deux infinis.

On fixe désormais un nombre $M \in \mathbb{R}$ **quelconque**. Notre but est de démontrer l'existence d'une bijection $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ telle que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = M\,.$$

On propose de construire σ par récurrence, en posant $\sigma(0) = 0$ et, pour tout $N \geq 0$:

— si $\sum\limits_{n=0}^{N} u_{\sigma(n)} \leq M$, on pose $\sigma(N+1) = \min(U^+ \setminus \sigma(\llbracket 0, N \rrbracket)$;

— sinon, on pose $\sigma(N+1) = \min(U^- \setminus \sigma(\llbracket 0, N \rrbracket)$.

4. Justifier l'existence des minima ci–dessus ainsi que l'injectivité de σ.
5. L'objectif de cette question est de démontrer par l'absurde la surjectivité de σ. Pour ce faire, supposons trouvé un entier $N \notin \sigma(\mathbb{N})$ et, quitte à replacer $(u_n)_n$ par $(-u_n)_n$, supposons que $N \in U^-$.
   (a) Démontrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $u_{\sigma(n)} > 0$. En déduire que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente.
   (b) On pose $\varphi(0) = \min U^+$ et, pour tout $n \geq 0$, $\varphi(n+1) = \min(U^+ \setminus \varphi(\llbracket 0, n \rrbracket))$. Démontrer que ce procédé définit une bijection strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to U^+$.
   (c) Montrer que les suites $\sum u_{\sigma(n)}$ et $\sum u_{\varphi(n)}$ sont de même nature. Conclure. ***Indication :*** *on pourra faire usage de la divergence de* $\sum u_n^+$.
   (d) Conclure.
6. Fixons dans cette question $\varepsilon > 0$.
   (a) Démontrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
   $$\forall n \geq N_0, \quad |u_{\sigma(n)}| \leq \varepsilon\,.$$
   (b) Justifier qu'il existe $N \geq N_0$ tel que $\sigma(N) \in U^+$ et $\sigma(N+1) \in U^-$.
   (c) Montrer par l'absurde que l'on a :
   $$M - \varepsilon \leq \sum_{n=0}^{N} u_{\sigma(n)} \leq M + \varepsilon\,.$$
   (d) Conclure.