Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 1 pages.

◆ Exercice 1 : autour des racines carrées

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; démontrer que $\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que n est pair si et seulement si n^2 l'est.
3. On suppose dans cette question que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, *i.e* que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ n'ayant aucun facteur commun.
   (a) Justifier que p^2 est pair.
   (b) Aboutir à une contradiction. Que conclure ?
4. De façon plus générale, démontrer que si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

◆ Exercice 2 : un calcul de somme

L'objectif de cet exercice est de calculer l'entier

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=1}^{999} k(k+1)(k+2) \\ &= (1\times 2\times 3) + (2\times 3\times 4) + (3\times 4\times 5) + \ldots + (999\times 1000\times 1001) \end{aligned}$$

de deux façons différentes. ***On ne demande pas ici une valeur approchée, mais une expression "simple" de N sous forme de fraction rationnelle, sans simplification déraisonnable.***

1. On fixe $n \geq 2$.
   (a) Déterminer (en le démontrant) la valeur de la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} k$.
   (b) Démontrer que :
   $$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$
   (c) En déduire la valeur de N. ***Indication :*** *on pourra s'intéresser à la somme* $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 - k$.
2. On pose, pour tout $n \geq 2$:
   $$\begin{aligned} N_n &= \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)(k+2) \\ &= (1\times 2\times 3) + (2\times 3\times 4) + (3\times 4\times 5) + \ldots + (n-1)n(n+1) . \end{aligned}$$
   (a) Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a :
   $$N_n = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$$
   (b) En déduire la valeur de N.