Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 2 pages.

♦ Exercice

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} k\, a_k a_{n-k}\,.$$

1. Calculer a_0, a_1, a_2, a_3 et S_0, S_1, S_2, S_3. Quelle conjecture est–on tenté de faire ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que :
   $$T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) a_k a_{n-k}\,.$$
   (b) En déduire que $2T_n = nS_n$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$(n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Établir que :
   $$T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n\,.$$
   (b) En déduire que $S_n = a_{n+1}$. On pourra raisonner par récurrence.
5. Démontrer par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$.

♦ Problème : autour des fonctions (im)paires

L'objectif de ce problème est l'étude de quelques propriétés des fonctions paires et impaires. **Une fois de plus, le plus grand soin est attendu dans la rédaction des réponses.**

– I –

Définition 1.

*Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dit **symétrique** si il vérifie la propriété suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x \in I) \Rightarrow (-x \in I)\,.$$

On rappelle que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont **convexes**, *i.e* si I est un intervalle, alors pour tout $x, y \in I$, $[x, y] \subset I$.

1. Donner la négation de la phrase quantifiée suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x \in I) \Rightarrow (-x \in I)\ .$$
2. Les intervalles suivants sont–ils symétriques (justifier) : $[-2, 2]$, $]-2, 2]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$?
3. Démontrer que si I est un intervalle symétrique non vide, alors $0 \in I$.
4. (a) Démontrer que si I, J sont deux intervalles symétriques de $\mathbb{R}$, alors $I \cup J$ est symétrique.
   (b) Même question avec $I \cap J$.

– II –

On fixe dans cette question un intervalle I symétrique et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et paire.

1. On pose :
$$\begin{aligned} \eta : I &\to I \\ x &\mapsto -x\ . \end{aligned}$$
   (a) Justifier que $f \circ \eta = f$.
   (b) Calculer la dérivée de $f \circ \eta$.
   (c) En déduire que f' est une fonction impaire.
2. Énoncer et démontrer un résultat analogue dans le cas où f est supposée impaire.

– III –

1. On fixe dans cette question un intervalle I symétrique et une fonction impaire $f : I \to \mathbb{R}$. On pose :
$$J = \{y \in \mathbb{R} \,|\, \exists\, x \in I,\ y = f(x)\}\ .$$
   (a) Expliquer en français à quoi correspond l'ensemble J.
   (b) Soit $y \in J$. Démontrer que $-y \in J$. Qu'en déduire ?
2. Soient I, J deux intervalles symétriques et soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
   (a) Justifier que la composée $g \circ f$ est bien définie.
   (b) On suppose f impaire et g paire. Démontrer que $g \circ f$ est paire.
   (c) De même, étudier l'éventuelle (im)parité de la fonction $g \circ f$ en fonction de celles de f et g.

– IV –

On fixe dans cette partie un intervalle I symétrique et une fonction f paire et croissante sur I. On fixe également deux points $x, y \in I$ tels que $x \leq y$.

1. On suppose que $-y \leq x \leq y$. Démontrer que $f(x) = f(y)$.
2. On suppose dans cette question que $x \leq -y \leq y$.
   (a) Justifier que $-x \geq y$.
   (b) En déduire que $f(x) = f(y)$.
3. En s'inspirant des questions précédentes, démontrer que si $x \leq y \leq -y$ alors $f(x) = f(y)$.
4. Que peut–on conclure quant à la fonction f ?