Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 2 pages.

♦ Exercice : une formule d'inversion

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} .$$
   (b) Soient $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq k \leq n$. Comparer
$$\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} \quad \text{et} \quad \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell} .$$
2. Soit $(x_n)_n$ une suite de réels. On pose
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad y_k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x_\ell .$$
   Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k .$$

♦ Problème : sous–groupes de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}$

Dans toute la suite, la notation $\mathbb{A}$ désignera un ensemble égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$. On dira qu'un ensemble G est un **sous–groupe** de $\mathbb{A}$ si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(SG1) $G \subset \mathbb{A}$;

(SG2) $0 \in G$;

(SG3) $\forall x, y \in G$, $x - y \in G$;

On dira également qu'un sous groupe G de $\mathbb{R}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ si pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, $G \cap]x, y[\neq \emptyset$.

– I –

1. Pour chacun des ensembles suivants, justifier s'ils sont ou non des sous–groupes de $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N}$, $\{0\}$, $\mathbb{Z}$.
2. Pour chacun des ensembles suivants, justifier s'ils sont ou non des sous–groupes de $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$, $\{0\}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$.
3. Soient G_1 et G_2 deux sous–groupes de $\mathbb{A}$. Démontrer que dans ce cas $G_1 \cap G_2$ est un sous–groupe de $\mathbb{A}$.
4. (a) Soit $a \in \mathbb{A}$. Démontrer que l'ensemble $a\mathbb{Z} = \{ak \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous–groupe de $\mathbb{A}$.
   (b) Soient G_1 et G_2 deux sous–groupes de $\mathbb{A}$. Que dire de $G_1 \cup G_2$?
5. Soit G un sous–groupe de $\mathbb{A}$ et soit $g \in G$. Démontrer qu'alors $g\mathbb{Z} \subset G$.

– II –

On fixe dans toute cette partie un sous–groupe G de $\mathbb{Z}$ différent de $\{0\}$.

1. Démontrer que l'ensemble $G \cap \mathbb{N}^*$ admet un plus petit élément, que l'on noteras n_0.
2. (a) Soit $n \in G$; justifier qu'il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n = qn_0 + r$ et $0 \leq r < n_0$.
   (b) En déduire que $G \subset n_0\mathbb{Z}$.
3. Faire la synthèse de cette partie en démontrant le résultat suivant.

> **Proposition 1.**
> *Soit G un sous–groupe de $\mathbb{Z}$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $G = n_0\mathbb{Z}$.*

– III –

On fixe dans toute cette partie un sous–groupe G de $\mathbb{R}$ différent de $\{0\}$.

1. Justifier que l'ensemble $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure $a \in \mathbb{R}_+$.
2. Dans cette question, on suppose $a > 0$.
   (a) Commençons par supposer que $a \notin G$.
      i. Démontrer qu'il existe $b \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $a < b < 2a$.
      ii. En déduire qu'il existe $c \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < b - c < a$.
      iii. Conclure en utilisant la question précédente que $a \in G$ et que $a\mathbb{Z} \subset G$.
   (b) On se fixe dans cette question un élément $g \in G$ et on pose $n = \left\lfloor \frac{g}{a} \right\rfloor$.
      i. Démontrer que $0 \leq g - na < a$.
      ii. En déduire que $g = na$.
   (c) Déduire de ce qui précède que $(a > 0) \Rightarrow (G = a\mathbb{Z})$.
3. Dans cette question, on suppose $a = 0$.
   (a) Fixons $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
      i. Démontrer qu'il existe $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < g < y - x$.
      ii. Posons $n = \left\lfloor \frac{x}{g} \right\rfloor + 1$. Montrer que $ng \in]x, y[$.
   (b) Déduire de ce qui précède que $(a = 0) \Rightarrow$ (G est dense dans $\mathbb{R}$).
4. Faire la synthèse de cette partie en démontrant le résultat suivant.

> **Proposition 2.**
> *Soit G un sous–groupe de $\mathbb{R}$. Alors :*
> - *soit il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $G = a\mathbb{Z}$;*
> - *soit G est dense dans $\mathbb{R}$.*