Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 3 pages.

⧫ Exercice 1 : du jamais vu

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

⧫ Exercice 2 : valeurs maximales

On pose, pour $z \in \mathbb{C}$

$$\varphi(z) = \left|z^3 - z + 2\right| .$$

On souhaite déterminer la valeur maximale de $\varphi(z)$ lorsque z décrit l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 .

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
2. Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 2$$

   Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. On regroupera ces informations dans un tableau de variations.
3. Soit $z \in \mathbb{U}$ et θ un de ses arguments. Montrer que

$$\left|z^3 - z + 2\right|^2 = 4f(\cos\theta)$$

4. Répondre à la question initialement posée. On précisera pour quelle(s) valeur(s) de $z \in \mathbb{U}$ cette valeur maximale est atteinte.

♦ Problème : autour de l'ensemble de Mandelbrot

On considère la suite récurrente $(z_n)_n$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_0 & = & 0 \\ \forall n \geq 0,\ z_{n+1} & = & z_n^2 + c \end{array}\right. , \text{ avec } c \in \mathbb{C}.$$

Le but de ce problème est d'étudier l'influence du paramètre c sur la nature de celle–ci.

0. Justifier que, pour tout $n \geq 0$ on a l'inégalité :

$$|z_{n+1}| \geq \left||z_n|^2 - |c|\right| .$$

– I –

On s'intéresse dans cette question au cas où c est un nombre réel.

1. Justifier que dans ce cas la suite $(z_n)_n$ est à valeurs réelles.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que
$$z_{n+1} - z_n \geq c - \frac{1}{4} .$$
   (b) Minorer, pour $n \geq 0$ la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} z_{k+1} - z_k$ en fonction de n et c.
   (c) En déduire que si $c > \frac{1}{4}$ alors la suite $(z_n)_n$ diverge vers $+\infty$.
3. Démontrer que si $c = -1$, alors
$$\forall n \geq 0, \quad z_n = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -1 \text{ sinon} \end{array}\right. .$$
4. Démontrer par récurrence que si $c \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, alors
$$\forall n \geq 0, \quad |z_n| \leq \frac{1}{2} .$$
5. Dans cette question, on suppose que $c \in [-2, 0]$.
   (a) Justifier que $c^2 + c \leq -c$.
   (b) Démontrer par récurrence que
$$\forall n \geq 0, \quad c \leq z_n \leq -c .$$

– II –

On fixe dans cette partie $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| > 2$.

1. Démontrer que l'équation $X^2 = X + |c|$ admet une unique solution α dans $]2, +\infty[$.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = |z_n| - \alpha .$$
   (a) Démontrer que
$$\forall n \geq 0,\ \alpha + u_{n+1} \geq (\alpha + u_n)^2 - |c|$$
   (b) En déduire que $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} \geq 2\alpha u_n$.
   (c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.
3. Que peut–on en déduire quant à la nature de la suite $(z_n)_n$?

– III –

On appelle **ensemble de Mandelbrot** la partie suivante de $\mathbb{C}$:

$$\mathscr{M} = \{c \in \mathbb{C} \,|\, (z_n)_n \text{ est bornée.}\}$$

1. Parmi les deux phrases quantifiées suivantes, sélectionner celle qui exprime le fait que la suite $(z_n)_n$ soit bornée. Justifier brièvement.
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists M \in \mathbb{R}_+,\ |z_n| \leq M$;
   (b) $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |z_n| \leq M$.
2. (a) Justifier que $\left]\frac{1}{4}, +\infty\right[\subset \mathbb{C} \setminus \mathscr{M}$.
   (b) A–t–on $-1 \in \mathscr{M}$?
3. Démontrer que $\mathscr{M} \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 2\}$.
4. Montrer, en justifiant soigneusement, que

$$\mathscr{M} \cap \mathbb{R} = \left[-2, \frac{1}{4}\right] .$$

5. On suppose dans cette question que $c \in \mathscr{M}$. On pose $\zeta_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\zeta_{n+1} = \zeta_n^2 + \overline{c}$.
   (a) Démontrer par récurrence que $\forall n \geq 0,\ \overline{\zeta_n} = z_n$.
   (b) En déduire une propriété géométrique de l'ensemble de Mandelbrot.

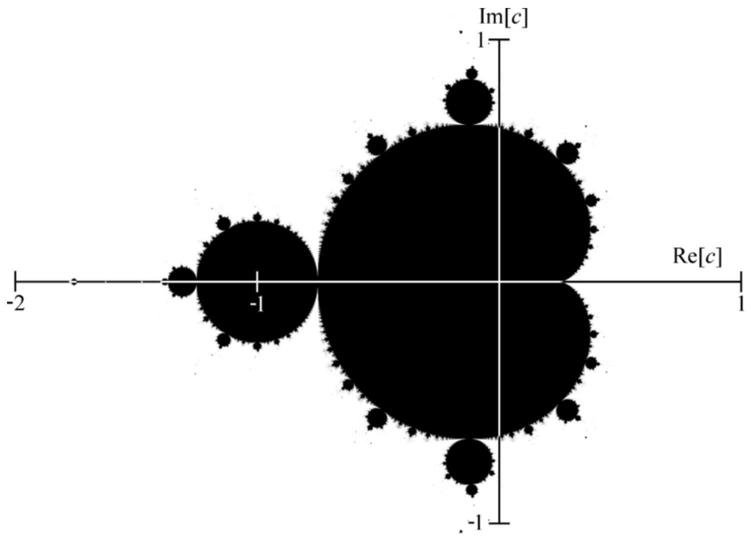

Figure 1 – Ensemble de Mandelbrot