Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 3 pages.

⧫ Exercice 1 : du jamais vu, bis

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \arctan(u_n)\,.$$

1. (a) Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de $(u_n)_n$.
   (b) Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = h(\arctan x)\,.$$

⧫ Exercice 2 : sommations symétriques

On fixe dans cet exercice un réel $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Si les a_k sont une famille de complexes et $p \in \mathbb{N}$ on notera :

$$\sum_{k=-p}^{p} a_k = a_{-p} + a_{-p+1} + \ldots a_{-1} + a_0 + a_1 + \ldots + a_p\,.$$

1. Démontrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=-p}^{p} e^{ik\theta} = \frac{\sin\left(\left(p+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

2. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{k=-p}^{p} e^{ik\theta}\right) = \sum_{k=-n}^{n}(n+1-|k|)e^{ik\theta}\,.$$

3. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ik\theta} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2$$

♦ Problème : fonctions lipschitziennes

On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **lipschitzienne** s'il existe un réel positif k tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(y) - f(x)| \leq k|y - x| \,. \tag{1}$$

Dans toute la suite de ce problème, on notera $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathscr{L}$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes, de telle sorte que l'on aura $\mathscr{L} \subset \mathscr{F}$.

Les parties I et II traitent des propriétés générales des fonctions lipschitziennes et sont indépendantes. La partie III ne peut s'envisager sans faire usage des deux précédentes.

– I –

1. Vérifier que $\mathscr{L}$ et $\mathscr{F} \setminus \mathscr{L}$ sont non vides.
2. Soit $f \in \mathscr{L}$. Démontrer que la quantité

$$K_f = \inf\{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|\}$$

   est bien définie.
3. Soient $f, g \in \mathscr{L}$.
   (a) Démontrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g \in \mathscr{L}$ et que

$$K_{f+\lambda g} \leq K_f + |\lambda| K_g \,.$$

   (b) Démontrer que $f \circ g \in \mathscr{L}$ et que

$$K_{f\circ g} \leq K_f K_g \,.$$

   (c) On suppose f et g bornées. Démontrer que leur produit $f \times g$ est aussi une fonction de $\mathscr{L}$. En est-il de même si f et g ne sont pas toutes les deux bornées ?

– II –

1. Soit $f \in \mathscr{L}$. Établir l'existence de deux réels $A, B \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$|f(x)| \leqslant A|x| + B.$$

2. Soit $f \in \mathscr{F}$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (|y - x| \leq 1) \Rightarrow (|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|) \,.$$

   Démontrer que $f \in \mathscr{L}$.
3. Soit $f \in \mathscr{L}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $f_\alpha : x \mapsto f(x + \alpha)$ est un élément de $\mathscr{L}$.
4. (a) Démontrer que l'on a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, la formule :

$$\sin(y) - \sin(x) = 2 \sin\left(\frac{y - x}{2}\right) \cos\left(\frac{y + x}{2}\right) \,.$$

   (b) En déduire que $\sin \in \mathscr{L}$.
   (c) Que dire de la fonction cosinus ?
5. (a) Démontrer, à l'aide d'une caractérisation séquentielle, que toute fonction lipschitzienne est continue.
   (b) Que dire de la réciproque ?

– III –

On s'intéresse dans cette partie aux solutions lipschitziennes F de l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - \lambda F(x+a) = f(x)\,, \tag{2}$$

où $f \in \mathscr{L}$ et $a, \lambda \in \mathbb{R}^*$ sont supposés connus et fixés.

1. Soit $F \in \mathscr{F}$ vérifiant l'équation (2). Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ F(x) = \lambda^n F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka).$$

2. On suppose ici que $|\lambda| < 1$.
   (a) Montrer que l'équation (2) admet au plus une solution dans $\mathscr{L}$.
   (b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (2) appartenant à $\mathscr{L}$ lorsque f est constante égale à 1.
   (c) On se place dans le cas où f est la fonction cosinus. Montrer que la fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par
   $$G : x \mapsto \frac{\cos(x) - \lambda\cos(x-a)}{1 - 2\lambda\cos(a) + \lambda^2},$$
   est une solution lipschitzienne de l'équation (2). En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (2) appartenant à $\mathscr{L}$ dans ce cas.
   (d) En s'inspirant de ce qui précède, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (2) appartenant à $\mathscr{L}$ si f est la fonction sinus.
3. On suppose désormais que $\lambda = 1$.
   (a) Montrer que, pour qu'il existe une fonction $F \in \mathscr{L}$ vérifiant l'équation (2), il faut que f soit bornée.
   (b) Donner un exemple de fonction $F \in \mathscr{L}$ non nulle et a–périodique.
   (c) En déduire que si l'équation (2) admet une solution dans $\mathscr{L}$, elle en admet une infinité.
4. Pour finir, on suppose que $\lambda = 1$ et que $f = \cos$.
   (a) Montrer que si $\cos(a) \neq 1$, l'équation (2) admet (au moins) une solution dans $\mathscr{L}$.
   (b) Montrer que si $\cos(a) = 1$, alors l'équation (2) n'admet pas de solution dans $\mathscr{L}$.