Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 3 pages.

Indiquer *sur la première page de la copie* l'un des choix suivants :

- **sujet A** : exercice CCINP, exercice A, problème ;
- **sujet B** : exercice CCINP, exercice B, problème.

Le sujet B est de difficulté théoriquement supérieure au sujet A. La copie ne sera évaluée que sur les composantes du sujet choisi. **Toute copie ne mentionnant pas son choix de sujet sur la première page sera considérée comme vide.**

⧫ Exercice CCINP

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}k!$ puis que p divise $\binom{p}{k}$.
   (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n \mod p$.
   Indication : Procéder par récurrence.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que : p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

⧫ Exercice A

On fixe dans cet exercice la matrice suivante

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on s'intéresse aux propriétés de l'ensemble

$$\widehat{\mathbb{C}} = \{aI_2 + bJ \mid a, b \in \mathbb{R}\} .$$

1. Vérifier que $J^2 = -I_2$.
2. Démontrer que $\widehat{\mathbb{C}}$ est un sous–anneau de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. On pose, pour $a, b \in \mathbb{R}$
$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$
   (a) Vérifier que $\widehat{\mathbb{C}} = \{M(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.
   (b) Justifier que pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $M(a,b) + M(c,d) = M(a+c, b+d)$
   (c) Démontrer que pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $M(a,b)M(c,d) = M(ac-bd, ad+bc)$.
   (d) En déduire que $\widehat{\mathbb{C}}$ est un corps.
4. On définit l'application suivante :
$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} &\to \widehat{\mathbb{C}} \\ x + iy &\mapsto M(x,y) \end{aligned} .$$
   Montrer que ϕ est un isomorphisme d'anneaux.

⧫ Exercice B (Mines Sup 2006)

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} x-y & y \\ 2 & x+y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})\,.$$

1. Déterminer l'ensemble des valeurs du couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquelles $M(x,y)$ est inversible. Dans ce cas, donner une expression de $M(x,y)^{-1}$.
2. On pose $\Sigma = \{M(x,y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$.
   (a) $(\Sigma, +)$ est–il un groupe ?
   (b) Même question pour $(\Sigma \cap GL_2(\mathbb{R}), \times)$.
3. On pose $\Lambda = \{A + M(x,y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que $(\Lambda, +, \times)$ est un sous–anneau de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Vérifier que si $B \in \Lambda$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda B \in \Lambda$.
4. Démontrer que l'application suivante est un morphisme de groupes bijectif :

$$\varphi : (\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +) \to (\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +)$$
$$B \mapsto M(2,1) \times B\,.$$

⧫ Problème : équation de Bessel

On étudiera à plusieurs reprises dans ce problème des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients **non constants**, qui ne rentrent donc pas dans le cadre du cours ; attention donc à lire **attentivement** l'énoncé des questions. On cherchera toujours les solutions à valeurs réelles des équations proposées. **La partie I est indépendante des parties II et III.**

– I –

On s'intéresse ici aux équations suivantes, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $0 \notin I$.

$$\mathrm{sh}(x)y'' + 2\mathrm{ch}(x)y' + \mathrm{sh}(x)y = 0 \tag{1}$$

$$\mathrm{sh}(x)y' + \mathrm{ch}(x)y = 0 \tag{2}$$

1. Justifier **proprement** que $I \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $I \subset \mathbb{R}_-^*$.

Dans toute la suite on considérera, pour simplifier, que $I = \mathbb{R}_+^*$.

2. Résoudre l'équation (2).
3. (a) Soit $f \in \mathscr{C}^2(I)$. Démontrer que f est solution de l'équation (1) si et seulement si $g : x \mapsto f'(x) + \dfrac{1}{\mathrm{th}(x)} f(x)$ est solution de (2).
   (b) En déduire les solutions de l'équation (1).

– II –

On fixe dans cette partie un intervalle I de $\mathbb{R}$ et deux fonctions $p, q \in \mathscr{C}^0(I)$. On supposes trouvées $f, g \in \mathscr{C}^2(I)$ telles que :

$$f'' + p(x)f = 0 \tag{3}$$

et

$$g'' + q(x)g = 0\,. \tag{4}$$

1. On pose, pour $x \in I$, la matrice suivante :

$$A(x) = \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})\,.$$

   (a) On pose, pour $x \in I$, $W(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$. À quelle condition sur $W(x)$ a–t–on $A(x) \in GL_2(\mathbb{R})$?

   (b) Justifier que $W \in \mathscr{C}^1(I)$ et démontrer que

$$\forall x \in I, \quad W'(x) = (p(x) - q(x))f(x)g(x)\,.$$

2. On suppose dans cette question que $p \leq q$ sur l'intervalle I et qu'il existe deux réels $a < b$ tels que $f(a) = f(b) = 0$ et que $f(]a, b[) \subset \mathbb{R}_+^*$.

   (a) Énoncer le théorème de Cauchy associé aux équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

   (b) En admettant que le théorème énoncé ci–avant s'applique à l'équation (3), démontrer que $f'(a)$ et $f'(b)$ sont non nuls.

   (c) Montrer, à l'aide d'un taux d'accroissement, que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.

   (d) Démontrer par l'absurde à l'aide du résultat de la question 1. qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$.

3. (a) Démontrer que si $q \geq 1$ sur I alors g s'annule au moins une fois sur tout segment de longueur π. ***Indication : on pourra utiliser le résultat de la question** 2. **en fixant** $p = 1$ **et en résolvant (3) dans ce cas.***

   (b) Montrer par l'absurde que si $q \leq 1$ sur I et que si g n'est pas nulle alors g s'annule au plus une fois sur tout segment de longueur strictement inférieure à π.

– III –

On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ et on considère l'**équation de Bessel**, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)y = 0\,. \tag{5}$$

1. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$; démontrer que f est solution de (5) si et seulement si $g : x \mapsto f(x)\sqrt{x}$ est solution de l'équation suivante :

$$y'' + \left(1 - \frac{4\lambda^2 - 1}{4x^2}\right)y = 0\,. \tag{6}$$

2. (a) Vérifier que si $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$ est solution de (5) et que $g : x \mapsto f(x)\sqrt{x}$ alors

$$f^{-1}(\{0\}) = g^{-1}(\{0\})\,.$$

   (b) On suppose que f est une solution non nulle de (5). Démontrer que :

      i. si $\lambda \geq \frac{1}{2}$ alors f s'annule au plus une fois sur tout segment de longueur strictement inférieure à π ;

      ii. si $\lambda \leq \frac{1}{2}$ alors f s'annule au moins une fois sur tout segment de longueur π.