Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 2 pages.

♦ Exercice CCINP

On considère les deux équations suivantes :
$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $[0, +\infty[$?

♦ Exercice 1 : extrait Centrale PC 2019

Soit l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{\sin(x) + 1}{\cos(x)}.$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f et, par convention, $f^{(0)} = f$.

1. Exprimer les dérivées f', f'' et $f^{(3)}$ à l'aide des fonctions usuelles.
2. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos(x)^{n+1}}.$$

   On explicitera les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 et, pour tout entier naturel n, on exprimera P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.
3. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le polynôme P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.
4. Montrer

$$\forall x \in I, \quad 2f'(x) = f(x)^2 + 1.$$

   Pour tout entier naturel n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.
5. Montrer $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\alpha_{n+1} = \sum^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

⧫ Exercice 2 : polynômes de Tchebychev

Dans toute la suite, on pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $p = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$:

$$T_n = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2k} X^{n-2k}(X^2-1)^k \ \in \mathbb{R}[X]\,.$$

Cet objet est appelé n**–ième polynôme de Tchebychev** (de ses prénoms Pafnuty Lvovich, mathématicien russe, 1821—1894). On l'identifiera, lorsque cela sera pertinent, à sa fonction polynomiale associée (définie sur $\mathbb{R}$).

1. Vérifier que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
2. (a) Déterminer T_0 et T_1.

   (b) Soit $x \in [-1, 1]$. Démontrer, à l'aide de la fonction arccos, que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)\,.$$

   (c) En déduire que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ dans $\mathbb{R}[X]$.

   (d) Déterminer les polynômes T_2, T_3 et T_4.
3. Démontrer par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété suivante : pour tout $n \geq 1$, il existe une famille $\alpha_{0,n}, \ldots, \alpha_{n-1,n}$ **d'entiers dépendants de** n telle que :

   $$2(T_n + 1) = (2X)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k,n}(2X)^k\,.$$

⧫ Exercice 3 : extrait Centrale PC 2019 (bis)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une liste de n nombres réels. On dit que la liste $(x_1, \ldots, x_n)$ est alternante montante si $(-1)^i\,(x_i - x_{i-1}) > 0$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$. On dit qu'elle est alternante descendante si $(-1)^i\,(x_i - x_{i-1}) < 0$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$.

Autrement dit, la liste $(x_1, \ldots, x_n)$ est alternante montante si elle vérifie les inégalités $x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > \cdots$. Elle est alternante descendante si elle vérifie les inégalités inverses.

✍ *Par exemple,* $(1, 5, 3, 11, 8, 9)$ *est alternante montante car* $1 < 5 > 3 < 11 > 8 < 9$ *et* $(7, 4, 5, 2, 12)$ *est alternante descendante car* $7 > 4 < 5 > 2 < 12$.

On dit qu'une permutation σ de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est alternante montante (respectivement alternante descendante) si la liste $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ est alternante montante (respectivement alternante descendante).

✍ *Par exemple, avec* $n = 7$ *et en représentant toute permutation* σ *par la liste des images* $(\sigma(1), \ldots, \sigma(7))$, *on constate que* $(1, 5, 4, 6, 2, 7, 3)$ *représente une permutation alternante montante et* $(3, 2, 6, 4, 7, 1, 5)$ *une permutation alternante descendante.*

1. Déterminer les permutations alternantes montantes de $[\![1, n]\!]$ pour $n = 2, n = 3, n = 4$.
2. Montrer, pour tout $n \geqslant 2$, que le nombre de permutations alternantes montantes est égal au nombre de permutations alternantes descendantes.

> Si $n \geqslant 2$, on note β_n le nombre de permutations alternantes montantes de $[\![1, n]\!]$, et on convient que $\beta_0 = \beta_1 = 1$.

3. Soient k et n deux entiers tels que $2 \leqslant k \leqslant n$ et A une partie à k éléments de $[\![1, n]\!]$. On considère les listes $(x_1, \ldots, x_k)$ constituées de k éléments deux à deux distincts de A. Montrer que le nombre de ces listes qui sont alternantes montantes est égal à β_k.

> Le nombre de celles qui sont alternantes descendantes est le même, mais on ne demande pas de le justifier.

4. Montrer, pour tout entier $n \geq 1$, que

   $$2\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k \beta_{n-k}\,.$$

   On pourra, pour $k \in [\![0, n]\!]$, dénombrer les permutations σ alternantes (montantes ou descendantes) de $[\![1, n+1]\!]$ telles que $\sigma(k+1) = n + 1$.
5. En déduire que $\beta_n = \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $(\alpha_n)_n$ est la suite définie dans l'exercice 1.