Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 3 pages.

♦ Exercice CCINP

1. On pose $g : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ et $h : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$. En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

♦ Problème : intégrales de Wallis et formule de Stirling

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème suivant, du à Abraham de Moivre et James Stirling.

Théorème 1.

On a l'équivalent suivant lorsque n tend vers l'infini :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\ .$$

La partie II a pour vocation de démontrer un lemme qui sera utilisé en partie III et est indépendante des deux autres.

– I –

*Dans toute la suite et pour $n \geq 0$, on appelle n–ième **intégrale de Wallis** la quantité*

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n \mathrm{d}x\ .$$

1. (a) Calculer W_0 et W_1.
   (b) Démontrer, à l'aide d'un changement de variable, que pour tout $n \geq 0$ on a
   $$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n \mathrm{d}x\ .$$
2. On rappelle que si f est une fonction continue et positive sur un segment $[a, b]$ on a :
   $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0\ .$$
   (a) Vérifier que la suite $(W_n)_n$ est décroissante.
   (b) Démontrer que la suite $(W_n)_n$ converge vers un élément de $\mathbb{R}_+$.
3. (a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :
   $$\forall n \geq 0, \quad W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n\ .$$

(b) En déduire que, pour tout $p \geq 0$:

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{et } W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \ .$$

(c) Montrer que, pour tout $n \geq 0$:

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)} \ .$$

4. (a) Démontrer que pour tout $n \geq 0$ on a :

$$1 - \frac{1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1 \ .$$

   (b) En déduire que $W_n \sim W_{n+1}$.

   (c) Donner un exemple de suite réelle $(u_n)_n$ telle que $u_n \not\sim u_{n+1}$.

5. (a) Démontrer que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

   (b) En déduire la limite éventuelle de la suite $(W_n)_n$.

– II –

On rappelle le résultat suivant, appelé ***formule de Chasles*** *: si f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et que $c \in [a,b]$ alors*

$$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \ .$$

1. Démontrer que si $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ sont n points distincts d'un segment $[a,b]$ et si $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ alors on a :

$$\int_{x_1}^{x_n} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t \ .$$

2. Dans cette question, on pose pour $N \geq 1$

$$u_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \ .$$

   (a) Démontrer que la suite $(u_N)_N$ est croissante.

   (b) À l'aide de la méthode des rectangles *(souvenir de terminale, faire un dessin...)*, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \ .$$

   (c) En déduire que la suite $(u_N)_N$ est convergente.

3. On fixe dans cette question deux suites réelles $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que
   - $a_n = \mathscr{O}(b_n)$;
   - $\forall n \geq 0$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

   On pose également, pour $N \geq 1$

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \quad \text{et} \quad B_N = \sum_{n=1}^{N} b_n \ .$$

   (a) Démontrer que les suites $(A_N)_N$ et $(B_N)_N$ sont croissantes.

   (b) Justifier qu'il existe un entier $K \geq 1$ et un réel $C > 0$ tels que pour tout $n \geq K$ on ait $a_n \leq C b_n$.

(c) En déduire si la suite $(B_N)_N$ converge, alors il en est de même pour $(A_N)_N$.

– III –

On considère dans cette partie les suites $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *définies comme suit :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \quad \textit{et} \quad \forall n \geq 2,\ v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1})\ .$$

1. (a) Démontrer que, pour tout $n \geq 2$:
$$v_n = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ .$$
   (b) En déduire un développement asymptotique à l'ordre $\frac{1}{n^2}$ de v_n lorsque $n \to \infty$.
   (c) Justifier que $v_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
2. (a) En utilisant un résultat de la partie II, démontrer que la suite de terme général $V_N = \sum_{n=2}^{N} v_n$ est convergente.
   (b) Montrer que les suites $(v_n)_n$ et $(u_n)_n$ convergent.
   (c) En déduire qu'il existe un nombre réel κ tel que :
$$n! \sim \kappa\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}\ .$$
3. (a) Démontrer en utilisant l'équivalent ci–dessus que $W_{2p} \sim \frac{\pi}{\kappa\sqrt{2p}}$ lorsque $p \to \infty$.
   (b) En comparant cet équivalent à celui obtenu en fin de partie I, en déduire que $\kappa = \sqrt{2\pi}$.