Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 3 pages.

♦ Exercice CCINP

Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}^3$

$$P \longmapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$$

   est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1,2,3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
4. **Application :** on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$. Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

♦ Problème :

On fixe un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et un $\mathbb{K}$–e.v E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que, si $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $f^0 = \mathrm{id}_E$ et, pour tout $k \geq 1$, $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Définition 1.

*Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est dit **nilpotent** si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$.*

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés des endomorphismes nilpotents. La partie II est dédiée à la démonstration de résultats techniques dont on pourra faire usage dans les parties III et IV. Les parties III, IV et V sont indépendantes les unes des autres.

– I –

1. On suppose $n \geq 2$ et on fixe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. On définit $f \in \mathscr{L}(E)$ de la façon suivante : pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, on pose $f(e_i) = 0$ et $f(e_n) = e_1$.
   (a) Justifier que ce procédé définit bien un endomorphisme de E. Est–il bijectif ?
   (b) Démontrer que f est nilpotent.
2. Une application nilpotente peut–elle être bijective ? Injective ? Surjective ?
3. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent.
   (a) Démontrer que la quantité suivante (appelée *indice de nilpotence de f*) est bien définie :

$$\mathrm{ind}(f) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^k = 0\}\ .$$

   (b) Montrer que si $f \neq 0$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$p = \mathrm{ind}(f) \Leftrightarrow (f^{p-1} \neq 0) \wedge (f^p = 0)\ .$$

4. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes nilpotents tels que $f \circ g = g \circ f$.
   (a) Montrer que $f \circ g$ est nilpotent et que $\mathrm{ind}(f \circ g) \leq \min(\mathrm{ind}(f), \mathrm{ind}(g))$.
   (b) Démontrer que si $\lambda \in \mathbb{K}$, $f + \lambda g$ est nilpotent et $\mathrm{ind}(f + \lambda g) \leq \mathrm{ind}(f) + \mathrm{ind}(g)$.

5. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent et soit $p = \mathrm{ind}(f)$.
   (a) Démontrer que pour tout $x \notin \ker(f^{p-1})$, la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.
   (b) En déduire que $p \leq n$.

– II –

Dans cette partie, on fixe $u \in \mathscr{L}(E)$ ***non nécessairement nilpotent.***

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a les inclusions :
   (a) $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$;
   (b) $\mathrm{Im}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(u^k)$.
2. (a) Montrer que si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(u^p) = \ker(u^{p+1})$, alors

$$\forall k \geq p, \quad \ker(u^k) = \ker(u^p) .$$

   (b) En considérant la suite $(d_k)_k$, où $d_k = \dim(\ker(u^k))$ pour $k \in \mathbb{N}$, démontrer qu'il existe un tel entier p.

***Dans toute la suite de cette partie, on suppose fixé un tel entier** p.*

3. (a) Démontrer que la suite $(\mathrm{rg}(u^k))_k$ est stationnaire à partir du rang p.
   (b) En déduire que

$$\forall k \geq p, \quad \mathrm{Im}(u^k) = \mathrm{Im}(u^p) .$$

4. (a) Soit $x \in \ker(u^p) \cap \mathrm{Im}(u^p)$. Vérifier qu'il existe $a \in E$ tel que $x = u^p(a)$ et $u^{2p}(a) = 0$.
   (b) En déduire que $x = 0$ et que $E = \ker(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p)$.

– III –

Dans cette partie, on fixe $u \in \mathscr{L}(E)$ ***nilpotent****.*

1. Montrer que $p = \mathrm{ind}(u)$ vérifie les hypothèses de la question II.2.(a).

***Dans toute la suite de cette partie, on suppose que** $\ker(u)$ **est une droite vectorielle de** E.*

2. Justifier que $\mathrm{Im}(u)$ est un hyperplan de E.
3. Le but de cette question est démontrer par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$ la propriété suivante :

$$H(k) : \quad \dim(\ker(u^k)) = k .$$

   (a) Justifier que $H(0)$ et $H(1)$ sont vérifiées.
   (b) Fixons $k \in [\![0, n-1]\!]$ et supposons la propriété $H(k)$ vérifiée. On note $v : \ker(u^{k+1}) \to E$ la restriction de u à $\ker(u^{k+1})$.
      i. Démontrer que $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(u) \cap \ker(u^k)$ et $\ker(v) = \ker(u)$.
      ii. En déduire que

$$k \leq \dim(\ker(u^{k+1})) \leq k + 1 .$$

      iii. Démontrer par l'absurde que $\dim(\ker(u^{k+1}))$ ne peut être égal à k. Conclure
4. En déduire que $p = n$.
5. Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ vérifiant les conditions de cette partie.

– IV –

On fixe dans cette partie $u_1, \dots, u_n \in \mathscr{L}(E)$ tous nilpotents et tels que $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$.

1. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$.
   (a) Démontrer que $u(\mathrm{Im}(v)) \subset \mathrm{Im}(v)$.
   (b) Montrer que $u(\ker(v)) \subset \ker(v)$.
2. Démontrer que l'endomorphisme $u_1 \circ \ldots \circ u_n$ est nilpotent.
3. Justifier que si les u_i sont tous égaux, alors $u_1 \circ \ldots \circ u_n = 0$.
4. Fixons $k \in [\![0, n-1]\!]$, et posons $F_{k+1} = \mathrm{Im}(u_{k+1} \circ u_{k+2} \circ \ldots \circ u_n)$.
   (a) Justifier que $F_k \subset F_{k+1}$.
   (b) On suppose que F_{k+1} n'est pas réduit à $\{0\}$. Démontrer qu'alors $\dim(F_k) < \dim(F_{k+1})$.
   (c) En déduire que $F_1 = \{0\}$.
5. Que conclure quant à l'endomorphisme $u_1 \circ \ldots \circ u_n$?

– V –

Dans cette partie, E désigne l'espace $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$ sur le corps $\mathbb{K}$. On s'intéresse à l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{d} : E &\to E \\ P &\mapsto P' \end{aligned} \quad .$$

1. Vérifier que $\mathrm{d} \in \mathscr{L}(E)$.
2. (a) Déterminer $\ker(\mathrm{d})$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{d})$.
   (b) A–t–on $E = \ker(\mathrm{d}) \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{d})$?
3. Démontrer que l'endomorphisme d est nilpotent et que $\mathrm{ind}(\mathrm{d}) = n$.
4. Déterminer un polynôme $P \in E$ tel que la famille $(P, \mathrm{d}(P), \ldots, \mathrm{d}^{n-1}(P))$ soit une base de E.