Ensembles, méthodes de démonstration

– I –

1. Soient A, B et C trois points du plan.
   (a) Écrire une assertion caractérisant le fait que le triangle ABC soit équilatéral.
   (b) En déduire une assertion caractérisant le fait que ce triangle ne soit **pas** équilatéral.
   (c) Même exercice en remplaçant "équilatéral" par "isocèle".
2. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Expliquer la signification et nier les phrases quantifiées suivantes :
   (a) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M$;
   (b) $\forall x \in A, \exists M \in \mathbb{R}, x \leq M$;
   (c) $\exists x \in A, \forall M \in \mathbb{R}, x \leq M$;
   (d) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A, x \leq M$.
3. Exprimer par une phrase quantifiée l'assertion "le cube de tout nombre réel positif supérieur ou égal à 3 est supérieur ou égal à 27". Donner sa négation.
4. Démontrer que l'assertion "tout entier divisible par 2 et 4 est divisible par 8" est fausse.
5. Démontrer par l'absurde que si $0 = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = 1$ sont des éléments de $[0,1]$ alors il existe i compris entre 0 et $n-1$ tel que $x_{i+1} - x_i \geq \dfrac{1}{n}$.

– II –

1. Soit $E = \{a,b,c,d\}$ un ensemble à quatre éléments. Compléter chacune des assertions suivantes avec le symbole "$\in$" ou " $\subset$ " de façon à ce qu'elles soient vraies.
   (a) $d \ldots E$; (c) $E \ldots E$; (e) $E \ldots \mathscr{P}(E)$; (g) $\{a,d\} \ldots E$;
   (b) $\{c\} \ldots E$; (d) $\emptyset \ldots E$; (f) $\emptyset \ldots \mathscr{P}(E)$; (h) $\{a,d\} \ldots \mathscr{P}(E)$.
2. Déterminer tous les ensembles A et B tels que $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$ et $A \cap B = \{2,3,5\}$.
3. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :
$$A \cap B = A \cap C \quad \Leftrightarrow \quad A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}\,.$$
4. Déterminer
$$\bigcap_{n \geq 1} \left[2 - \frac{1}{n}\,,\, 5 + \frac{7}{n}\right]\,.$$
5. Soit E un ensemble. Déterminer
$$X = \{A \in \mathscr{P}(E) \,|\, \forall B \in \mathscr{P}(E), A \cup B = B\}\,.$$
6. On pose :
$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + xy^2 = x^4 \Leftrightarrow x + y^2 = x^3\}\,.$$
   Peut–on donner une expression plus concise de l'ensemble X ?
7. Comparer les deux ensembles suivants :
$$X = \{(x,y)^2 \in \mathbb{R} \,|\, xy = 1\} \quad \text{et} \quad Y = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (y \neq 0) \wedge \left(x = \frac{1}{y}\right)\right\}\,.$$

– III –

1. Soit $P(n)$ la propriété "l'entier $8^n + 1$ est divisible par 7". Montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \geq 0$. Que peut–on en déduire ?
2. On considère la suite définie par récurrence comme suit :
$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 1 \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+2} &= u_{n+1} + 3u_n \end{cases}\,.$$
   (a) Déterminer les racines ψ et $\overline{\psi}$ du polynôme $X^2 - X - 3$.
   (b) Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\psi^n - \overline{\psi}^n}{\psi - \overline{\psi}}\,.$$
3. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists\,(p,q) \in \mathbb{N}^2,\ n = 2^p(2q+1)\,.$$