Rappels et compléments calculatoires

– I –

1. Faire l'étude des fonctions listées *infra* sur leurs ensembles de définition respectifs. Par "faire l'étude", on entend dresser le tableau de variation (avec les éventuelles limites), lister les éventuels extrema (locaux et/ou globaux), énoncer d'éventuelles propriétés remarquables (parité, périodicité, ...) et tracer l'allure de la courbe.

   (a) $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$; (c) $h : x \mapsto \ln(\sqrt{x}) - \dfrac{1}{2}\ln(x)$; (e) $j : x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$

   (b) $g : x \mapsto e^{2x^3+7}$; (d) $i : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2}{1+x^2}\right)$; (f) $k : x \mapsto \exp(\log(3x)^2)$.

2. (a) Montrer que, pour tout $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} .$$

3. Montrer que pour tous $a, b > 0$
$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln \frac{a+b}{2} .$$

– II –

1. Calculer les sommes suivantes, pour $n \geq 1$:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} .$$

2. Soit $n \geq 1$; en faisant un usage pertinent de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, calculer les sommes suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} , \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} .$$

3. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$; calculer
$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} .$$

4. En considérant la fonction
$$f : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k} x^k ,$$
   démontrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} .$$

– III –

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Déterminer
$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i+j \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij .$$

2. Calculer, pour $n, p \in \mathbb{N}$, la somme :
$$\sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j=1}^{p} (i+j) \right) .$$

3. En faisant un usage pertinent de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{2n}$, démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} .$$