

NOMBRES RÉELS

– I –

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$; démontrer que $\sqrt{|x-y|} \geq |\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|$.
3. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

– II –

1. Déterminer la borne supérieure, si elle existe, de l'ensemble

$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{x^3} \mid x \in [1, \infty[\right\}.$$

2. Soient A, B deux parties non vides de $\overline{\mathbb{R}}$ telles que $B \subset A$. Montrer, en justifiant l'existence des quantités concernées, que :

$$\inf(A) \leq \inf(B) \leq \sup(B) \leq \sup(A).$$

3. Soient A et B deux parties non vides et bornées de \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in A \times B, \quad x < y.$$

Que dire des quantités $\inf(B)$ et $\sup(A)$?

4. Soient A, B deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} . On pose

$$A + B = \{x + y \mid (x, y) \in A \times B\}.$$

Démontrer que $A + B$ admet une borne supérieure vérifiant $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

5. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$; étudier les éventuelles bornes supérieure et inférieure de l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{x}{y} \mid x, y \in [a, b] \right\}.$$

6. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction croissante. On pose

$$A = \{x \in [0, 1] \mid x \leq f(x)\}.$$

- (a) Démontrer que pour tout $x \in A$ on a également $f(x) \in A$.
 - (b) Montrer que A admet une borne supérieure a et que $f(a) \geq a$.
 - (c) En déduire que $f(a) = a$.
7. Soit A une partie non vide et bornée de \mathbb{R} . On pose

$$B = \{|x - y| \mid x, y \in A\}.$$

- (a) Démontrer que B est non vide et bornée.
- (b) Montrer que B admet un plus petit élément, dont on donnera la valeur.
- (c) Démontrer que B admet une borne supérieure vérifiant $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

– III –

1. Soit $x \in \mathbb{R}$; étudier la quantité $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.
2. On considère la fonction suivante :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x - \lfloor x \rfloor|.$$

- (a) Tracer l'allure du graphe de f sur $[-3, 3]$.
 - (b) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.
 - (c) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)$.
 - (d) Démontrer que $\sup(f(\mathbb{R})) = 1$.
3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$; démontrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.