Fonctions usuelles

– I –

1. Simplifier l'expression suivante, en précisant pour quelles valeurs de x elle a un sens :

$$x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}.$$

2. Étudier le sens de variation des deux fonctions suivantes :

(a) pour $a > 0$, $x \mapsto x^a$; (b) pour $x \in]0,1[$, $a \mapsto x^a$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$.
4. Déterminer les nombres réels x et y tels que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e^{x-y} & = & \pi \\ e^x e^y & = & 7 \end{array} \right. .$$

5. Soit $a \in \mathbb{R}$; déterminer le nombre le nombre de solutions de l'équation

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = a.$$

– II –

1. Soient $p, q \in \mathbb{R}$; démontrer que :

(a) $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$; (c) $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$;

(b) $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$; (d) $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$; montrer que $\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$.

– III –

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$; démontrer que :
   (a) $\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) \pm \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$;
   (b) $\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) \pm \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$; montrer que :

$$\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}(x)+1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}(x)-1}{2}}\ .$$

3. Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; on pose $t = \tan(\theta/2)$ et $x = \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.
   (a) Démontrer que $x = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$.
   (b) En déduire une expression de $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{th}(x)$ à l'aide de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$.
   (c) Exprimer θ en fonction de x.
4. (a) Dériver, lorsque cela est possible, la fonction $x \mapsto \arctan\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \arctan(e^x)$.
   (b) En déduire qu'il existe un réel c tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \arctan(e^x) + c\ .$$

   Déterminer la valeur de c.