Applications, relations

– I –

1. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
   (a) $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2+1 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rl} \varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto 2n \end{array}$ (c) $\begin{array}{rl} \psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto |n| \end{array}$ (d) $\begin{array}{rl} h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \\ x \mapsto x+1 \end{array}$
2. Tracer l'allure du graphe de la fonction suivante ; est–elle injective, surjective, bijective ?
$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$
3. Déterminer les injections f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq n$.
4. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = (x, xy)$ et $g(x, y) = (x + y, x - y)$.
   (a) Les fonctions f et g sont–elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?
   (b) Déterminer l'image et l'image réciproque de l'ensemble $\Delta = \{(x, x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ par les applications f et g.
5. Soit E un ensemble et soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. On fixe une application $f : E \to E$.
   (a) Montrer que $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$.
   (b) Montrer que $(A \subset B) \Rightarrow (f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B))$.
   (c) Comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.
   (d) Comparer $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$.
6. Soient f, g deux applications telles que $f \circ g$ soit bijective. Que dire de f et g ? Réciproquement ?
7. Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
   (a) Montrer que $\forall A \in \mathscr{P}(E), f^{-1}(f(A)) \supset A$.
   (b) Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A \in \mathscr{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$.
8. Soit E un ensemble et soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$; on considère l'application
$$\begin{array}{rl} \eta : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E) \\ X \mapsto (X \cup A, X \cup B) \end{array}.$$
   Démontrer que η est injective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
9. Soient E, F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application surjective. On pose, pour tout $x \in F$,
$$A_x = f^{-1}(\{x\}).$$
   Montrer que les A_x forment une partition de E.

– II –

1. Montrer que la relation "divise" est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.
2. Soient E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une application injective. On définit sur E une relation binaire $\preccurlyeq$ par
$$x \preccurlyeq y \iff f(x) \leq f(y)$$
   Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.
3. On définit une relation $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x\mathscr{R}y) \iff (\cos(x) = \cos(y)).$$
   (a) Justifier que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Quelle est la classe de 0 ? De $\frac{\pi}{2}$? De π ?
4. On définit une relation $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x\mathscr{R}y) \iff (x^2 - y^2 = x - y).$$
   (a) Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Déterminer la classe d'un élément x de $\mathbb{R}$. De combien d'éléments ces classes sont–elles constituées ?