Nombres complexes

– I –

1. Mettre sous forme algébrique $\dfrac{1+2i}{1+i}$ et $(2+i)^3$.
2. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1)}{2+2i}\right)^{10}$.
3. Soient a, b, c trois nombres complexes de module 1 deux à deux distincts. Montrer que
$$\frac{b}{a}\left(\frac{c-a}{c-b}\right)^2 \in \mathbb{R}_+^* .$$
4. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z+\bar{z}=|z|$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $|z+1|=|z|+1$.
5. Démontrer que les points d'affixes $1+i$, $-(1+i)$ et $-4+2i$ forment un triangle rectangle.
6. Déterminer un entier $n \geq 0$ tel que $(\sqrt{3}+i)^n \in \mathbb{R}$.
7. Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^4 \in \mathbb{R}$.

– II –

1. Linéariser $\sin^5(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Soient $a, \theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$; calculer les sommes suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos(a+k\theta) .$$
3. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on fixe $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer j^n et $(j^2)^n$.
   (b) Exprimer sous la forme d'une somme la quantité $(1+1)^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n$.
   (c) En déduire la valeur de la somme
$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k} .$$
4. Calculer les sommes suivantes, pour $n \geq 1$:
$$\sum_{0\leq 2k\leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{0\leq 2k+1\leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} .$$

– III –

1. Déterminer les racines carrées des nombre complexes $\sqrt{3}+i$ et $5-12i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3+z^2+z+1=0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-z^2-1=0$.
4. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Résoudre sur l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$
$$z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$$
   On précisera le nombre de solutions suivant la valeur de θ.
   (b) En déduire la résolution sur $\mathbb{C}$ de l'équation
$$z^{2n} - 2z^n\cos(n\theta) + 1 = 0$$
   On précisera le nombre de solutions suivant la valeur de θ.
5. Soit ω une racine septième de l'unité distincte de 1 . Simplifier le nombre
$$\alpha = \frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} + \frac{\omega^3}{1+\omega^6}.$$