Suites numériques

– I –

1. Démontrer que la suite de terme général $u_n = 2 + (-1)^n$ est divergente.
2. Étudier la convergence des suites de termes généraux suivants :
   (a) $u_n = (-1)^n e^{-n}$ (c) $v_n = \dfrac{n^2+7}{n^3+n^4}$ (e) $w_n = \lfloor e^n \rfloor$
   (b) $x_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ avec $a > 0$ et $b > 0$ (d) $y_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$ (f) $z_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $[0,1]$ telles que $u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 1.
4. Que dire de la convergence de la somme d'une suite divergente et d'une suite convergente ?
5. Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \dfrac{2n^2 - \sin(n)}{\cos(n) - 3n^2}$.
6. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle croissante telle que $(u_{2n})_n$ soit convergente. Montrer que $(u_n)_n$ converge.
7. Montrer que les suites définies par
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{n}$$
pour $n \geq 1$ sont adjacentes.
8. Démontrer que toute suite convergente d'entiers relatifs est stationnaire.

– II –

1. Déterminer la borne supérieure de l'ensemble $\left\{1 - \dfrac{1}{x} \,\middle|\, x > 0\right\}$.
2. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ différent de $+\infty$ et $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Déterminer la borne inférieure de l'ensemble $\{|f(x)| \mid x \in]a, +\infty[\}$.
3. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de $I \setminus \{a\}$ telle que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ (on dit que a est *adhérent* à $I \setminus \{a\}$).

– III –

1. Étudier la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{i}{4} u_n$.
2. *Moyenne de Césaro.* Soit $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que
$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell\ .$$
3. *Moyenne arithmético–géométrique.* Soit u, v deux suites réelles définies de la façon suivante : à $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ fixés tels que $0 < v_0 < u_0$ on pose :
$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}\ .$$
Démontrer que u et v sont adjacentes.
4. Déterminer le terme général des suites récurrentes suivantes et calculer leur limite éventuelle.
   (a) $u_0 = 3$, $u_1 = 11$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n$;
   (b) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
5. On considère la suite positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 = 2u_n$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \ln(u_n) - \ln(2)$.
   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   (b) Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en déduire celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.