Groupes, anneaux et corps

– I –

1. (a) Soit G un groupe tel que $\forall g \in G,\ g^2 = e_G$. Montrer que G est abélien.
   (b) Que dire du cas où $\forall g \in G,\ g^2 = g$?
2. Soit G un groupe abélien fini ayant un nombre impair d'éléments. Calculer le produit des éléments de G.
3. Déterminer tous les morphismes de groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui–même.
4. Démontrer que les groupes $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ sont isomorphes.
5. On pose $\Gamma = \{(z \in \mathbb{C}) \mapsto az + b \,|\, (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\}$. Démontrer que $(\Gamma, \circ)$ est un groupe. Est–il abélien ?
6. Soit $(G, +)$ un groupe abélien et soient H, K deux sous–groupes de G.
   (a) Démontrer que $H + K = \{h + k \,|\, (h, k) \in H \times K\}$ est un sous–groupe de G.
   (b) Démontrer que si $H \cap K$ est trivial, alors $H + K$ est isomorphe au groupe produit $H \times K$.
7. Soit $n \geq 1$; on pose
   $$H_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \,|\, \sigma(n) = n\} .$$
   Démontrer que H_n est un sous–groupe de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$.

– II –

1. On appelle *anneau de Boole* tout anneau $\mathbb{A}$ tel que $\forall a \in \mathbb{A},\ a^2 = a$.
   (a) Démontrer que tout anneau de Boole est commutatif.
   (b) Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau de Boole. Montrer que $\forall a \in \mathbb{A},\ a + a = 0$.
2. Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. On définit l'ensemble des éléments *nilpotents* de $\mathbb{A}$ de la façon suivante :
   $$\mathrm{Nil}(\mathbb{A}) = \{x \in \mathbb{A} \,|\, \exists n \in \mathbb{N},\ x^n = 0\} .$$
   (a) Démontrer que $\mathrm{Nil}(\mathbb{A})$ est stable par produit et somme.
   (b) $\mathrm{Nil}(\mathbb{A})$ est–il un sous–anneau de $\mathbb{A}$?
3. Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. On appelle *idéal* de $\mathbb{A}$ tout sous–groupe $(I, +)$ de $(\mathbb{A}, +)$ tel que
   $$\forall a \in \mathbb{A},\ \forall x \in I,\ ax \in I .$$
   (a) Démontrer que si I est un idéal contenant 1 alors $I = \mathbb{A}$. Quels sont les idéaux d'un corps ?
   (b) Démontrer que si I et J sont deux idéaux de $\mathbb{A}$ alors $I \cap J$ et $I + J$ le sont également.
4. Soit $\mathbb{A}$ un anneau tel que l'application $f : x \mapsto x^2$ soit un endomorphisme surjectif de $\mathbb{A}$. Démontrer que $\mathbb{A}$ est commutatif.
5. L'anneau $\mathbb{R}^2$ (muni des opérations terme à terme) est–il intègre ?
6. Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. Démontrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un corps.
7. Soit $\mathbb{K}$ un corps.
   (a) Justifier que pour tout $x, y \in \mathbb{K}$ on a $(xy = 0) \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$.
   (b) Démontrer que tout endomorphisme de $\mathbb{K}$ est injectif.