Arithmétique sur $\mathbb{Z}$

– I –

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$; démontrer que les entiers $20n^2 + 4n + 5$ et $10n^2 + 2n + 2$ sont premiers entre eux.
2. Résoudre les équations diophantiennes suivantes :
   (a) $15x + 6y = 3$;
   (b) $42x + 28y = 14$;
   (c) $9x + 270y = 7$.
3. Déterminer le pgcd et une relation de Bézout associés aux entiers 155 et 94.
4. Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^{2021} par 3.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fraction rationnelle $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ est–elle irréductible ?
6. L'équation $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$ admet–elle des solutions rationnelles ?
7. Soient a et b deux entiers non nuls premiers entre eux.
   (a) Déterminer le pgcd de $a + b$ et ab.
   (b) Démontrer que $a^2 \wedge b^2 = 1$ et exprimer les coefficients de Bézout de a^2 et b^2 en fonction de ceux de a et b.
8. On considère la suite (F_n) définie par ses premiers termes $\mathrm{F}_0 = 0$ et $\mathrm{F}_1 = 1$ et par la relation de récurrence $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_n + \mathrm{F}_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{F}_{n-1}\ \mathrm{F}_{n+1} - \mathrm{F}_n^2 = (-1)^n$. Déterminer le pgcd de F_n et F_{n-1}.
   (b) Montrer que pour tout couple $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$,
   $$\mathrm{F}_{n+p} = \mathrm{F}_p\ \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_{p-1}\ \mathrm{F}_n\,.$$
   En déduire que $\mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_p = \mathrm{F}_{n+p} \wedge \mathrm{F}_p$.
   (c) Démontrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathrm{F}_m \wedge \mathrm{F}_n = \mathrm{F}_{m \wedge n}$.
9. Montrer que la plus grande puissance de 2 divisant $5^{2^n} - 1$ est 2^{n+2}.

– II –

1. Pour $n \geq 2$, on appelle n–ième *nombre de Mersenne* l'entier $M_n = 2^n - 1$.
   (a) Démontrer que pour tout $n \geq 2$, si M_n est premier alors n l'est.
   (b) Que dire de la réciproque ?
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $D(n)$ la somme de tous les diviseurs strictement positifs de n et $\mathrm{Div}(n)$ l'ensemble de ces derniers.
   (a) Calculer $D(n)$ pour n compris entre 1 et 17.
   (b) Déterminer $D(p^\alpha)$ pour p premier et $\alpha \geq 1$.
   (c) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Démontrer que l'application
   $$\begin{aligned} \pi : \mathrm{Div}(a) \times \mathrm{Div}(b) &\to \mathrm{Div}(ab) \\ (d_1, d_2) &\mapsto d_1 d_2 \end{aligned}$$
   est bijective. En déduire que $D(ab) = D(a)D(b)$.
   (d) Donner une méthode permettant, connaissant un entier n et sa décomposition en produit de facteurs premiers, de calculer $D(n)$. En déduire $D(2021)$.
3. *Formule de Legendre.*
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que :
   $$\left\lfloor \frac{\lfloor xn \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor\,.$$
   (b) En déduire que si p est un nombre premier et $n \in \mathbb{N}$ alors :
   $$v_p(n!) = \sum_{i=0}^{k} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor\,, \quad \text{avec} \quad k = \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor\,.$$