Dérivation

– I –

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x+a}{1-ax}\right)$.
   (a) Étudier la dérivabilité de la fonction f. Est–elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de dérivabilité ?
   (b) Donner une expression alternative de la fonction f.
2. On considère la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}$:
$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$
   (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction polynomiale P_n tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x) .$$
   (c) En déduire que f est dérivable à tout ordre en 0 et calculer $f^{(n)}(0)$.
3. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ se prolonge par continuité en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ sans y être de classe $\mathscr{C}^1$.
4. Démontrer que la fonction tangente hyperbolique admet une réciproque définie sur un ensemble à déterminer et calculer sa dérivée.

– II –

1. Soit P une fonction polynomiale ; démontrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions.
2. On considère la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ ainsi que la suite $(u_n)_n$ vérifiant $u_0 = 3$ et $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Démontrer que f admet un point fixe, que nous noterons α.
   (b) Justifier que $\forall n \geq 0,\ u_n \in \mathbb{R}_+$.
   (c) Montrer que $\forall n \geq 0,\ |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$. En déduire que $(u_n)_n$ converge (vers quelle limite ?).
3. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$.

– III –

1. Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b])$ une fonction convexe. Démontrer que :
$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} .$$
2. Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$; démontrer que :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^2} .$$
3. *Inégalités de Young et Hölder.* Soient $p, q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
   (a) Démontrer que pour tous $x, y > 0$, on a $xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.
   (b) En déduire que pour tous $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$ on a :
$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} .$$