Matrices

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n est un entier fixé dans $\mathbb{N}^*$.

– I –

1. Soient A et B deux matrices diagonales. Que dire des coefficients de la matrice AB ?
2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \ .$$
   (a) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0$.
   (b) En déduire que $A \in GL_3(\mathbb{R})$ et calculer A^{-1}.
3. Soit $A \in T_n^+(\mathbb{R})$. Démontrer que A est diagonale si et seulement si $A^T A = AA^T$.
4. Soient $i, j, k, \ell \in [\![1, n]\!]$; déterminer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
5. Soient $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ trois matrices non nulles telles que $ABC = 0$. Démontrer qu'au moins deux de ces dernières sont non inversibles.
6. Calculer les puissances de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$
7. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la matrice suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix} \ .$$
   (a) Vérifier que $A^2 = A + 2I_3$.
   (b) Démontrer qu'il existe deux suites $a, b \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ telles que pour tout $n \geq 0$, $A^n = a_n A + b_n I_3$.
   (c) Déterminer de façon explicite les suites a et b.
8. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\theta) \\ -1 & 0 & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} \ .$$
   (a) Déterminer A^3.
   (b) En déduite $(A + I_3)^n$ pour $n \geq 1$.

– II –

1. À quelle condition un système triangulaire est–il de Cramer ?
2. Résoudre, pour $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{C}$ le système :
$$\left\{ \begin{array}{lllll} 2x_1 & + \ x_2 & + \ x_3 & + \ x_4 = & y_1 \\ x_1 & + \ 2x_2 & + \ x_3 & + \ x_4 = & y_2 \\ x_1 & + \ x_2 & + \ 2x_3 & + \ x_4 = & y_3 \\ x_1 & + \ x_2 & + \ x_3 & + \ 2x_4 = & y_4 \end{array} \right. \ .$$
3. Inverser la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix} \ .$$