Équations différentielles linéaires

▶ Calculs de primitives

1. Déterminer une primitive des expressions suivantes vues comme fonctions de la variable t :
   (a) $\dfrac{e^t}{e^{2t}+1}$; (d) $\dfrac{e^{1/t}}{t^2}$; (g) $\sqrt{1+t}-\sqrt[3]{t}$; (j) $\dfrac{\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}}$;
   (b) $\sin(4t)$; (e) $\dfrac{t^3+1}{t+1}$; (h) $\dfrac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$; (k) $\dfrac{t^3}{t+1}$;
   (c) $\dfrac{3}{(t+2)^3}$; (f) $\cos(t)e^{\sin(t)}$; (i) $\dfrac{t^2+t+1}{t^2}$; (ℓ) $\dfrac{1}{\sin(t)^2\cos(t)^2}$.
2. Déterminer une primitive (en précisant l'ensemble de définition) des fonctions suivantes à l'aide du changement de variable donné :
   (a) $x \mapsto \dfrac{\cos(x)+\sin(x)}{\sin(x)\cos(x)^2}$ via $u=\tan(x)$ (d) $x \mapsto \dfrac{1}{1+\text{th}(x)}$ via $u=e^x$;
   (b) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ via $u=\sqrt{e^x-1}$; (e) $x \mapsto \dfrac{1}{x+\sqrt[3]{x}}$ via $u=\sqrt[3]{x}$.
   (c) $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ via $u=\sqrt{x^2-1}$;

▶ Équations différentielles linéaires du premier ordre

1. Résoudre les équations homogènes suivantes :
   (a) $y'+3xy=0$ sur $\mathbb{R}$; (c) $y'-\cos(x)y=0$ sur $\mathbb{R}$;
   (b) $y'-\dfrac{1}{1+x^2}y=0$ sur $\mathbb{R}$; (d) $y'+\dfrac{1}{x\ln x}y=0$ sur $]1,\infty[$.
2. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   Indication : pour les questions (a) à (c) on pourra rechercher une solution particulière sous une forme similaire à celle du second membre.
   (a) $y'+2y=t^2+t+1$ sur $\mathbb{R}$; (d) $y'+\dfrac{1}{1+x}y=\dfrac{1}{(1+x)^3}$ sur $]-1,\infty[$;
   (b) $y'+3y=(x^2+1)\,e^{-3x}$ sur $\mathbb{R}$; (e) $y'+y=\dfrac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;
   (c) $y'+2y=(x+1)\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$; (f) $y'-\tan(t)y=\dfrac{1}{1+\cos(t)}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.
3. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :
   (a) $x\ln(x)y'-y=4$ sur $]1,\infty[$ avec $y(e)=1$;
   (b) $y'+xy=2x$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0)=1$.
   (c) $y'+\text{th}(t)y=t\,\text{th}(t)$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0)=1$.
4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
   $$y'\text{sh}(x)-\frac{y}{\text{ch}(x)}=\frac{\text{sh}(x)^2}{\text{ch}(x)}.$$
5. Déterminer l'ensemble des fonctions $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ telles que :
   $$\forall x\in\mathbb{R},\qquad 2f(x)=3x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

▶ Équations différentielles linéaires d'ordre deux

1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:
   (a) $y''+y'=3+2t$; (e) $y''-2y'+2y=e^{-t}\cos(t)$;
   (b) $y''+3y'+2y=e^{-t}$; (f) $y''+3y'+2y=\sin(t)$;
   (c) $y''-2y'-3y=t^2e^t$; (g) $y''+4y'+3y=\cos(3t)$;
   (d) $y''+5y'+4y=te^{-t}$; (h) $y''+y=\text{sh}(t)$.

2. On considère l'équation différentielle dont on recherche les solutions à valeurs réelles
$$y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin(x)\,. \qquad \text{(E)}$$
   (a) Résoudre l'équation (E).
   (b) Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.
3. (a) Démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
   (b) Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(-x) = x$.

▶ Approfondissements

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)\,.$$
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)dt$$
   (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t)\mathrm{d}t$$
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et que f est solution de l'équation différentielle $y''+y = g$.
   (c) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = g$.
3. Soient $\omega \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dérivables telles que
$$\begin{cases} x' = -y + \sin(\omega t) \\ y' = x - \cos(\omega t) \end{cases}$$
   (a) Soit $z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par
$$t \longmapsto x(t) + iy(t)$$
   Justifier la dérivabilité de z et montrer que z vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.
   (b) Déterminer x et y.
4. *Équation de Bernoulli.* On souhaite résoudre l'équation suivante sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0, +\infty[$:
$$x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x^2}\,. \qquad \text{(E)}$$
   On se donne $y : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $\mathrm{Y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{Y} : t \mapsto y(e^t)$.
   (a) Calculer les dérivées y, y' et y'' en fonction de Y, Y' et Y''.
   (b) En déduire que y est solution de (E) si et seulement si Y est solution d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants (E′) que l'on précisera.
   (c) Résoudre (E′) sur $\mathbb{R}$.
   (d) En déduire les solutions de (E) sur I.
   (e) Montrer qu'il existe une unique solution y de (E) sur I telle que $y(1) = y'(1) = 0$.

▶ Exercice CCINP

$\boxed{42}$ On considère les deux équations suivantes :
$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$
(a) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
(b) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
(c) L'équation (E) admet-elle des solutions sur $[0, +\infty[$?