POLYNÔMES

▶ Arithmétique sur les polynômes

1. Soit $n \geq 2$. Effectuer la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{K}[X]$, lorsque :
   (a) $A = X^3 + X^2 - X + 1,\ B = X - 1$;
   (b) $A = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 1,\ B = X^2 + X + 1$;
   (c) $A = X^5 + X^4 - X^3 + X - 1,\ B = X^3 + X^2 + 2$;
   (d) $A = X^{3n+2} + X^{3n+1} + X^{3n}, B = X^2 + X + 1$;
   (e) $A = X^{n+2} + X^{n+1} - X^n,\ B = X^3 - 2X + 1$;
   (f) $A = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2,\ B = (X-2)^2$;
   (g) $A = X^n,\ B = X - 1$.
2. Soit $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$.
   (a) Calculer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$.
   (b) Calculer $P(\mathrm{i})$.
3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   (a) Démontrer que $P - X$ divise $P^k - X^k$ pour tout $k \geq 1$.
   (b) En déduire que $P - X$ divise $P \circ P - P$.
   (c) Conclure en démontrant que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
4. Déterminer le pgcd des polynômes $X^5 + X^3 + X^2 + 1$ et $2X^3 + 1$.
5. (a) Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$ et soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
   (b) Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos\varphi + X\sin\varphi)^n$ par $X^2 + 1$.

▶ Racines

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \overline{z}$.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point et f, g deux fonctions polynomiales telles que $\forall x \in I,\ f(x)g(x) = 0$. Démontrer que $f = 0$ ou $g = 0$. Ce résultat s'applique–t–il aux fonctions non polynomiales ?
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

$$\text{(a)} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x + y & = & 3 \\ x^2 + y^2 & = & 5 \end{array}\right. \quad ; \qquad \text{(b)} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x + y + z & = & 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} & = & 1 \end{array}\right. .$$

4. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P(X^2 + 1) = P^2 + 1$.
   (a) On considère la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ pour $n \geq 0$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(u_n) = u_n$.
   (b) Que peut–on en déduire sur le polynôme P ?
5. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :
$$(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = X^{n \wedge p} - 1\,.$$
6. Soient x, y, z trois complexes non nuls tels que $x + y + z = 0$ et $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$. Montrer que $|x| = |y| = |z|$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme
$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{X}^k}{k!}$$
possède-t-il une racine multiple ?

▶ Dérivation

1. Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $P(3X) = P' + 5P''$.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(1) = 1$, $P'(1) = 0$, $P''(1) = 3$ et $P^{(n)}(1) = 0$ pour $n \geq 3$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X-1)^3$ divise le polynôme
$$P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n\ .$$
4. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \int_k^{k+1} P(t)\mathrm{d}t = k+1\ .$$
5. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que
$$P(X+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}\ .$$
6. Déterminer tous les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé.
7. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé de degré $n \geq 2$. Démontrer que P' est scindé.

▶ Polynômes irréductibles

1. Décomposer en produit de facteurs irréductibles sur R les polynômes suivants :
   (a) $X^3 + 1$; (f) $X^4 - X^2 - 12$;
   (b) $X^8 + 1$; (g) $X^6 + 1$;
   (c) $X^4 + 1$; (h) $X^6 - 1$;
   (d) $X^8 + X^4 + 1$; (i) $X^{2n+1} - 1$ $(n \geq 1)$;
   (e) $X^4 + X^2 + 1$; (j) $1 + X^3 + \mathrm{X}^6 + X^9$.
2. On pose :
$$P = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1.$$
   (a) Vérifier que i est racine multiple de P.
   (b) En déduire la décomposition de P sur R.
3. Démontrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
4. Quelle est la décomposition en produit d'irréductibles de $X^8 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$?
5. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}$[X], puis dans $\mathbb{R}$[X] le polynôme :
$$P = X^{2n} - 2X^n \cos(n\theta) + 1\ .$$

▶ Approfondissements

1. On dit qu'un sous–groupe de $\mathbb{K}[X]$ en est un *idéal* si $\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in I$, $PQ \in I$.
   (a) Démontrer que pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, $A\mathbb{K}[X] = \{AP \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
   (b) On fixe dans cette question un idéal I de $\mathbb{K}[X]$ différent de $\{0\}$.
      i. Justifier l'existence de $r = \min\{\deg P \mid P \in I \setminus \{0\}\}$.
      ii. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $U \in I$ de degré r.
      iii. Démontrer que $I = U\mathbb{K}[X]$.
2. Soit $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]^2$ tel que $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathrm{P}(n) \wedge \mathrm{Q}(n)$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est périodique.
3. *Une somme de Newton.* Soient a, b et c les racines complexes du polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - 2\mathrm{X} + 5$.
   (a) Calculer $\mathrm{S} = a^4 + b^4 + c^4$.
   (b) Trouver un polynôme de degré trois à coefficients entiers dont a^2, b^2 et c^2 sont les racines.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme $\mathrm{P}_n = \mathrm{X}^{n-1} + \mathrm{X}^{n-2} + \cdots + \mathrm{X} + 1$.
   (b) En déduire une expression simple de
$$\mathrm{A}_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$
   (c) Donner une expression simple de
$$\mathrm{B}_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right).$$
   (d) On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer
$$C_n = \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{\ell \neq k} \left(\omega^k - \omega^\ell\right).$$
5. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $X^2 - (a^2 + b^2)$ divise $X^{2n} - (a^n + b^n)^2$.
6. (a) Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible. Démontrer que P n'admet pas de racine double dans $\mathbb{C}$.
   (b) Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme de degré 5 admettant une racine multiple dans $\mathbb{C}$. Démontrer que P admet une racine dans $\mathbb{Q}$.
7. Soient P, Q deux polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$ à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ tels que :
$$PQ = \sum_{k=0}^{n-1} X^k.$$
   (a) Donner un exemple non trivial de telle décomposition.
   (b) Démontrer que les coefficients de P et Q sont dans $\{0, 1\}$.

▶ Exercices CCINP

$\boxed{85}$ 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Énoncer, sans démonstration, la formule de Taylor.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.

2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

$\boxed{87}$ Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant
$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in \{0, \cdots, n\} \ P(a_i) = b_i.$$
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
   Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :
$$\forall i \in [\![0, \ldots, n]\!] \quad b_i = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}$$
3. Prouver que $\forall p \in [\![0, \ldots, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.