

DÉNOMBREMENT ET COMBINATOIRE

► Dénombrement

1. Soient n et p deux entiers naturels. Déterminer les cardinaux respectifs des ensembles $\llbracket 1, n \rrbracket \cap \llbracket 1, p \rrbracket$ et $\llbracket 1, n \rrbracket \cup \llbracket 1, p \rrbracket$.
2. Déterminer le nombre d'anagrammes des mots "lapin", "erratum" et "protozoaire".
3. Soient A, B, C trois parties finies d'un ensemble E . Déterminer $\text{Card}(A \cup B \cup C)$.
4. Combien existe-t-il d'entiers naturels inférieurs ou égaux à 1000 qui ne soient divisibles ni par 5 ni par 7 ?
5. Soit E un ensemble fini ; déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cup B = E$.
6. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$.
 - (a) Combien existe-t-il de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$?
 - (b) Démontrer que

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}(X) = n2^{n-1} .$$

7. Soit E un ensemble fini. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on note $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice de A .
 - (a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Justifier que

$$\text{Card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x) .$$

- (b) Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(E)$. On pose $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$; justifier que

$$\prod_{i=1}^n (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_i}) = 0$$

- (c) En déduire que

$$\text{card}(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{card} \left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right) .$$

8. Montrer qu'une partie de \mathbb{N} est finie si et seulement si elle est majorée.
9. Démontrer qu'un ensemble E est infini si et seulement si il existe une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ dont les termes sont deux à deux distincts.

► Combinatoire

10. Combien de triangles peut-on former avec les sommets d'un polygone régulier à n côtés ?
11. Quel est le nombre de relations d'ordre totales sur un ensemble de cardinal $n \geq 1$?
12. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. Démontrer que

$$p^n = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} S(n, k)$$

où, pour $1 \leq k \leq n$, $S(n, k)$ est le nombre de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, k \rrbracket$.

13. On effectue un tirage de 8 cartes parmi un jeu de 32 cartes.
 - (a) Combien existe-t-il de tels tirages possibles ?
 - (b) Combien de ces derniers sont constitués de deux carrés ?
14. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Démontrer que E possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

► Approfondissements

15. Soit $n \geq 0$; on appelle *dérangement* de taille n toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ n'ayant aucun point fixe.
- (a) Justifier que l'ensemble des dérangements de taille n est fini. On notera d_n son cardinal.
- (b) Démontrer que

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k.$$

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E_n = \llbracket 1, n \rrbracket$ et on note \mathfrak{S}_n l'ensemble des permutations de E_n . Pour $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $S_{n,p}$ le nombre de permutations de E_n ayant exactement p points fixes.
- (a) Montrer que $S_{n,n} = 1$ et que $S_{n,n-1} = 0$.
- (b) Montrer que

$$\sum_{k=0}^n S_{n,k} = n!.$$

- (c) On pose $\omega_n = S_{n,0}$ avec la convention que $\omega_0 = 1$. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$S_{n,k} = \binom{n}{k} \omega_{n-k}.$$

- (d) En déduire que

$$\sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!} = 1.$$

- (e) En raisonnant par récurrence, montrer que

$$\frac{\omega_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

- (f) En déduire $\lim \frac{\omega_n}{n!}$.

17. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant les réels $\delta_k = kx - \lfloor kx \rfloor$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, montrer qu'il existe un couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $q \leq n$ et

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}.$$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

- (c) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $p \in \mathbb{Z}$ tels qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

- (d) On admet l'irrationalité de π . En particulier, $\sin n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pose alors $u_n = \frac{1}{n \sin n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la suite $(u_n)_n$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\ell = 0$. et aboutir à une contradiction.

► Exercice CCINP

112 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.