Espaces vectoriels

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

► Espaces et sous–espaces vectoriels

1. Les ensembles suivants sont–ils des $\mathbb{K}$–e.v ?
   (a) L'ensemble des suites convergentes d'éléments de $\mathbb{K}$;
   (b) l'ensemble des suites monotones d'éléments de $\mathbb{K}$;
   (c) l'ensemble des suites bornées d'éléments de $\mathbb{K}$;
   (d) l'ensemble $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y = z+2t\}$;
   (e) l'ensemble $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y = z+2t-1\}$;
   (f) l'ensemble des solutions de $y' + xy = 0$;
   (g) l'ensemble des solutions de $y' + xy = x^2$;
   (h) l'ensemble $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(2) = 2f(1)\}$;
   (i) l'ensemble $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$;
   (j) la courbe représentative de $x \mapsto x^2$.
2. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v et soient $a, b \in E \setminus \{0\}$.
   (a) Démontrer que $(a \in \mathscr{D}_b) \Leftrightarrow (b \in \mathscr{D}_a)$.
   (b) Que dire si a ou b est égal à 0 ?
3. (a) $\mathbb{R}$ est–il un s.e.v du $\mathbb{R}$–e.v $\mathbb{C}$?
   (b) $\mathbb{R}$ est–il un s.e.v du $\mathbb{C}$–e.v $\mathbb{C}$?
4. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que l'ensemble $A\mathbb{K}[X]$ des multiples de A est un s.e.v de $\mathbb{K}[X]$.
5. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v et soient F, G deux s.e.v de E.
   (a) $E \setminus F$ est–il un s.e.v de E ?
   (b) Soient $x \in F$ et $y \notin F$; démontrer que $x + y \notin F$. Expliciter alors le sous–espace $\mathrm{Vect}(E \setminus F)$.
   (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour que leur réunion $F \cup G$ soit un s.e.v de E.
6. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le scalaire $a \in \mathbb{K}$ pour que l'ensemble
$$E = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = a \right\}$$
   soit un $\mathbb{K}$–e.v.
7. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v et soient X, Y deux parties de E.
   (a) Montrer que
$$\mathrm{Vect}(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}) \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{X}) \cap \mathrm{vect}(\mathrm{Y}).$$
   (b) Que dire de l'inclusion réciproque ?

► Applications linéaires

8. Vérifier que l'application
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto (x+y-z, 2x-z) \end{aligned}$$
   est linéaire et déterminer son noyau. Est–elle injective ? Surjective ? Bijective ?
9. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$. Démontrer que l'application
$$\begin{aligned} \phi : \mathscr{C}^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto af'' + bf' + cf \end{aligned}$$
   est linéaire et déterminer son noyau. Est–elle injective ?
10. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts ; on considère l'application
$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ P &\mapsto (P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{aligned} \quad .$$

(a) Justifier que φ est linéaire.
(b) Démontrer que la restriction de φ à $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est injective.
(c) Déterminer le noyau de φ.

11. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$–e.v et soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Démontrer que

$$(v \circ u = 0) \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(u) \subset \ker(v)) .$$

12. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v et soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = u$. Démontrer que pour tout $n \geq 0$ on a $u^n \circ v - v \circ u^n = nu^n$.

13. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que $f^n = 0$ (on dira que f est *nilpotente*).
    (a) Soit $x \in \ker(\mathrm{id}_E - f)$. Démontrer que $f^k(x) = x$ pour tout entier $k \geq 1$. En déduire que $\mathrm{id}_E - f$ est injectif.
    (b) Simplifier les expressions

$$(\mathrm{id}_E - f) \circ \left(\mathrm{id}_E + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}\right) \qquad \text{et} \qquad \left(\mathrm{id}_E + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}\right) \circ (\mathrm{id}_E - f)$$

    et en déduire que $\mathrm{id}_E - f$ est un automorphisme.
    (c) Démontrer que, pour tout entier $k \geq 1$, l'endomorphisme $\mathrm{id}_E - f^k$ est inversible. On précisera l'expression de son inverse.

▶ Familles remarquables

14. Les familles suivantes sont–elles libres dans $\mathbb{R}^4$? Génératrices ?
    (a) $((1,0,0,1),(0,0,0,1))$;
    (b) $((1,2,2,1),(1,0,1,0),(1,3,0,0))$;
    (c) $((0,0,0,1),(0,0,2,0),(1,0,0,0),(\pi,1,0,0),(1,1,1,1))$;
    (d) $((t,0,0,1),(0,t^2,0,-t),(t,t,t,0),(0,0,0,1))$, pour $t \in \mathbb{R}$.

15. Les familles suivantes sont–elles libres dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
    (a) $(1, \sin, \cos, \sin^2, \cos^2)$;
    (b) $(f, g, \cos)$, où $f : x \mapsto 7$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$;
    (c) $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$, où $f_\alpha : x \mapsto |x - \alpha|$;
    (d) $(e_a)_{a \in \mathbb{R}}$, où $e_a : x \mapsto e^{ax}$.

16. Donner une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :
    (a) le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$;
    (b) le $\mathbb{R}$–e.v des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$;
    (c) le $\mathbb{C}$–e.v des suites (u_n) à valeurs complexes vérifiant $u_{n+2} + (2 - 3\mathrm{i})\, u_{n+1} - (5+i)u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

17. On considère l'ensemble suivant, pour $n \geq 2$:

$$E = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \,|\, \forall k \in [\![0, n-2]\!],\ P^{(k)}(\pi) = 0\} .$$

    (a) Montrer que E est un $\mathbb{K}$–e.v.
    (b) Déterminer une base de E.

18. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$u_k = \sum_{j=1}^{k} e_j .$$

Démontrer que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.

▶ Sommes de sous–espaces

19. On considère les deux sous–ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}((1, 1, 1)) .$$

  (a) Démontrer que F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

  (b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

20. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v et soit F un s.e.v de E. On suppose qu'il existe un s.e.v G de E tel que $E = F \oplus G$; G est–il unique ?

21. Soient E et E' deux $\mathbb{K}$–e.v et $u \in \mathscr{L}(E, E')$. On fixe F et G deux s.e.v de E.

  (a) Justifier que $u(F + G) = u(F) + u(G)$.

  (b) Démontrer que si F et G sont en somme directe et que u est injective, alors $u(F)$ et $u(G)$ sont en somme directe.

  (c) Montrer que si $E = F \oplus G$ et $u \in GL(E, E')$, alors $E' = u(F) \oplus u(G)$.

22. Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. On pose

$$F = \{Q \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(Q) < \deg(P)\} \quad \text{et} \quad G = P\mathbb{K}[X] .$$

Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

23. Déterminer la nature de l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x, y) \mapsto (x - 2y, -y)$.

24. Soit $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $abc \neq 0$ et $a + b + c = 1$. On pose ensuite :

$$f : (x, y, z) \mapsto (x, y, z) - (x + y + z)u .$$

Démontrer que f est un projecteur et déterminer son image et son noyau.

25. Déterminer, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, le projecteur sur l'ensemble des fonctions paires parallèlement à celui des fonctions impaires. On vérifiera bien sur que les ensembles cités sont des espaces vectoriels.

▶ Approfondissements

26. *Lemme de Schur.* Soit E un $\mathbb{K}$–e.v et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ soit liée. Démontrer que f est une homothétie.

27. Soient F, G, F' et G' quatre sev d'un $\mathbb{K}$–e.v E tels que $F \cap G = F' \cap G'$. Démontrer que

$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F.$$

28. On se place dans le $\mathbb{R}$–espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n : x \mapsto \cos^n(x) \qquad \text{et} \qquad g_n : x \mapsto \cos(nx).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\mathrm{Vect}\left(\{f_k \mid 0 \leq k \leq n\}\right) = \mathrm{Vect}\left(\{g_k \mid 0 \leq k \leq n\}\right) .$$

29. Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$–e.v E.

  (a) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

  (b) Montrer que si g est surjective et $E = \mathrm{Im}(f) + \ker(g)$, alors $g \circ f$ est surjective.

30. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v, $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\ker(u) = \mathrm{Im}(u)$ et S un supplémentaire de $\mathrm{Im}(u)$.

  (a) Montrer que, pour tout $a \in E$. il existe un unique couple $(y, z) \in \mathrm{S}^2$ tel que $x = y + u(z)$. On pose alors $z = v(x)$ et $y = w(x)$.

  (b) Montrer que v est linéaire et calculer $u \circ v + v \circ u$.

  (c) Montrer que w est linéaire et calculer $u \circ w + w \circ u$.

▶ Exercices CCINP

$\boxed{55}$ Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$$

avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

$\boxed{62}$ Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

$\boxed{85}$

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*, P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\big(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\big)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que : a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

$\boxed{90}$ Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}^3$
   $$P \longmapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$$
   est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1,2,3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
4. **Application :** on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$. Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.