Espaces vectoriels de dimension finie

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

▶ Calculs de dimension

1. Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; démontrer que $(1, \omega)$ est une base de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$–e.v.
2. Démontrer que l'ensemble des suites arithmétiques complexes est un espace vectoriel de dimension finie. En déterminer une base.
3. Déterminer la dimension de l'espace engendré par $(\exp, \cos, \sin)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
4. Déterminer dans $\mathbb{R}^4$ le rang de la famille (e_1, e_2, e_3), où $e_1 = (1, 0, 2, 3)$, $e_2 = (1, 1, 1, 1)$ et $e_3 = (2, 0, 0, 1)$.
5. Soient F et G deux plans vectoriels distincts de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F + G$. La somme est-elle directe ?
6. On se place dans l'espace $\mathbb{R}^4$ et on pose

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z = t = 0\} \text{ et } F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z-t = 2x-y+3z-4t = 0\}.$$

   (a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires. Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$ adaptée à cette décomposition en somme directe.

   (b) Calculer la projection sur F parallèlement à G d'un vecteur (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$.

7. Pour $x \in]-1, 1[$ on pose :

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ \ f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ \ f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \text{et} \quad f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   Déterminer le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) dans l'espace $\mathbb{R}^{]-1,1[}$.

8. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$ (on dit que u est *nilpotent*).

   (a) Donner un exemple de tel endomorphisme.

   (b) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ soit libre.

   (c) Que peut–on en déduire quant à la dimension de E ?

▶ Théorème du rang

9. Soit E $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie non nulle et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   (i) $\ker(f) = \ker(f^2)$;

   (ii) $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$;

   (iii) $E = \mathrm{Im}(f) + \ker(f)$;

   (iv) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

10. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie et soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

    (a) Démontrer que $E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(v)$.

    (b) Montrer que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(v)$.

11. Soient E, F et G des $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie. Démontrer que si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$ on a :

$$\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u) - \dim(\mathrm{Im}(u) \cap \ker(v)).$$

12. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie n et soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer que :

    (a) $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n \leq \mathrm{rg}(f \circ g) \leq \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$;

    (b) $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq \mathrm{rg}(f + g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

13. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie paire $n = 2p$ et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer que :

$$((f^2 = 0) \wedge (\mathrm{rg}(f) = p)) \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(f) = \ker(f)) \,.$$

14. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie n et soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u + v = \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leq n$.
    (a) Démontrer que $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Im}(v)$.
    (b) En déduire que u et v sont des projecteurs et que $u \circ v = v \circ u = 0$.

▶ Formes linéaires et hyperplans

15. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts d'un espace vectoriel E de dimension finie n.
    (a) Vérifier que $n \geqslant 2$.
    (b) Montrer que $\dim(\mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2) = n - 2$.
16. On pose $e_1 = (1, 0, 1)$ et $e_2 = (0, 1, 0)$ dans $\mathbb{K}^3$.
    (a) Calculer le rang de la famille (e_1, e_2) et la compléter en une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^3$.
    (b) Déterminer les formes linéaires coordonnées relatives à $\mathscr{B}$.
17. On considère les formes linéaires suivantes sur $\mathbb{R}^3$: $\varphi_1 : (x, y, z) \mapsto y+z$, $\varphi_2 : (x, y, z) \mapsto 2x+3y-z$ et $\varphi_3 : (x, y, z) \mapsto 8y$.
    (a) Exprimer φ_1, φ_2 et φ_3 comme combinaison linéaire des formes linéaires coordonnées relatives à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
    (b) Déterminer le rang de la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.
18. Soit F un sous-espace vectoriel strict d'un $\mathbb{K}$–e.v E de dimension finie.
    (a) Montrer que F peut s'écrire comme une intersection d'un nombre fini d'hyperplans.
    (b) Quel est le nombre minimum d'hyperplans nécessaire ?

▶ Approfondissements

19. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie et soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
    (a) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a les inclusions :

$$\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(u^k) \supset \mathrm{Im}(u^{k+1}) \,.$$

    (b) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(u^p) = \ker(u^{p+1})$ et que

$$\forall k \geq p, \quad \ker(u^k) = \ker(u^p) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(u^k) = \mathrm{Im}(u^p) \,.$$

20. Soient $x_0, \ldots, x_n \in [0, 1]$ des réels vérifiant que $x_0 = 0$, $x_n = 1$ et $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $x_i < x_{i+1}$. Démontrer que l'ensemble E des fonctions à valeurs réelles dont la restriction à chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$ est affine est un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer $\dim(E)$.
21. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Déterminer une CNS sur u pour qu'il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ v = 0$ et $u + v \in GL(E)$.
22. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie. Déterminer les idéaux de l'anneau $\mathscr{L}(E)$.

▶ Exercices CCINP

$\boxed{55}$ Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$$

avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.

2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

$\boxed{60}$ Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
4. A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

$\boxed{62}$ Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\operatorname{Im}(f+\mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(f-2\mathrm{Id})$.

$\boxed{64}$ Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Longrightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

$\boxed{72}$ Soit n un entier naturel non nul. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.

$\boxed{87}$ Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant
$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in \{0, \cdots, n\} \; P(a_i) = b_i.$$
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
   Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :
$$\forall i \in [\![0, \ldots, n]\!] \quad b_i = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}$$
3. Prouver que $\forall p \in [\![0, \ldots, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

$\boxed{90}$ Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}^3$
$$P \longmapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$$
   est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
4. **Application :** on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$. Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.