Révisions et compléments

▶ Exercices CCINP

$\boxed{2}$ On pose $f : x \mapsto \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer f en éléments simples.

$\boxed{3}$

1. On pose $g : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$. Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$. En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

$\boxed{4}$

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$. Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$
3. Prouver que l'implication :
$$(\ f \text{ est dérivable en } x_0) \Longrightarrow (f' \text{ admet une limite finie en } x_0\ )$$
est fausse. *Indication :* on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

$\boxed{7}$

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.
   (a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

$\boxed{31}$

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.

$\boxed{42}$ On considère les deux équations suivantes :
$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $[0,+\infty[$?

$\boxed{43}$ Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de $(u_n)_n$.
   (b) Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\arctan x)$.

$\boxed{46}$

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty, \pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

$\boxed{55}$ Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$$
avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

$\boxed{59}$ Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n. On pose : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$. *Indication :* si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

$\boxed{60}$ Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
4. A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

$\boxed{62}$ Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\operatorname{Im}(f+\mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(f-2\mathrm{Id})$.

$\boxed{64}$ Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Longrightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

$\boxed{71}$ Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$.

$\boxed{72}$ Soit n un entier naturel non nul. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.

$\boxed{84}$

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z + \mathrm{i})^n = (z - \mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

$\boxed{85}$

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*, P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\big(1, X - a, (X - a)^2, \cdots, (X - a)^n\big)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que : a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r - 1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5+aX^2+bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

$\boxed{86}$

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que $\forall k \in [\![1, p - 1]\!], p$ divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} k\,!$ puis en déduire que p divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$.
   (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n \bmod p$. *Indication :* procéder par récurrence.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que : p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

87 Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant
$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in \{0, \cdots, n\} \; P(a_i) = b_i.$$
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :
$$\forall i \in [\![0, \ldots, n]\!] \;\; b_i = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } \; i = k \end{cases}$$
3. Prouver que $\forall p \in [\![0, \ldots, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

89 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

90 Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}^3$
$$P \longmapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
4. **Application :** on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$. Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

94
1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{N}$. Prouver que :
$$(a \mid c \text{ et } b \mid c) \Longleftrightarrow ab \mid c\,.$$
3. On considère le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 6 \; [17] \\ x \equiv 4 \; [15] \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
   (b) Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

112 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathscr{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.