Intégration

Dans toute la suite, a et b désignent deux nombres réels tels que $a < b$.

▶ Calculs d'intégrales

1. Calculer les intégrales suivantes :

(a)	$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+5}$;	(d)	$\displaystyle\int_0^2 x(x-\lfloor x\rfloor)\,\mathrm{d}x$;	(g)	$\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^2}\,\mathrm{d}x$;
(b)	$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3(x)\,\mathrm{d}x$;	(e)	$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+5}}$;	(h)	$\displaystyle\int_0^{\ln(\pi)} e^x \sin\left(e^x\right)\,\mathrm{d}x$;
(c)	$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\tan^3(x)}$;	(f)	$\displaystyle\int_0^e \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$;	(i)	$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)^5}\,\mathrm{d}x$.

2. Soient $p, q \in \mathbb{N}$; on pose
$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x\ .$$
   (a) Pour $q \in \mathbb{N}$, calculer $I_{0,q}$.
   (b) Si $p > 0$, déterminer une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p-1,q+1}$. En déduire $I_{p,q}$ dans le cas général.
3. En posant le changement de variable $x = \cos(t)$, calculer
$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x\ .$$

▶ Intégrale de Riemann

4. Établir que la fonction suivante se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-1,\infty[$:
$$F : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t-1}\,\mathrm{d}t\,.$$
5. On considère la fonction H définie sur $]1;+\infty[$ par
$$H : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}\ .$$
   (a) Montrer que H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ et calculer sa dérivée.
   (b) Démontrer que la fonction $u : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en 1.
   (c) Calculer la limite en 1^+de la fonction H.
6. *Inégalité de la moyenne.* Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$; démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$
7. *Lemme de Riemann–Lebesgue.* Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{C})$; démontrer que
$$\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0\ .$$
8. Soit $f \in \mathscr{C}^0([-a,a])$ une fonction impaire. Démontrer que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Que dire du cas où f est paire ?

9. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction T–périodique (avec $T > 0$). Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$
10. Déterminer la limite quand $n \to \infty$ des quantités suivantes :
(a) $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{k^2+n^2}}$; (b) $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$; (c) $\displaystyle \frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}$.
11. Déterminer un équivalent de la suite définie par :
$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}\sqrt{n-k}\,.$$
12. Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$; établir que
$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

▶ Formules de Taylor

13. (a) Déterminer (en justifiant leur existence) les dérivées successives de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.
(b) En déduire que
$$\forall x \in [0,1], \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln(1+x)\,.$$
14. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré impair vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f^{(n)}| \leq |P|\,.$$
(a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$. En déduire que $f = 0$.
(b) Le résultat reste–il vrai si l'on suppose $\deg(P)$ pair ?
15. Démontrer que :
$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(2)}{2}\,.$$
16. Soit $f \in \mathscr{C}^2([0,1])$ vérifiant $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.

▶ Approfondissements

17. Déterminer une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et n'y admettant pas de primitive.
18. *Démonstration du théorème de Heine.* Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Nous procédons par l'absurde en supposant que f n'est pas u.c. sur $[a,b]$.
(a) Démontrer qu'il existe dans ce cas un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_n, (y_n)_n$ d'éléments de $[a,b]$ tels que
$$\forall n \geq 1, \qquad \left(|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}\right) \wedge (|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon)\,.$$
(b) Montrer qu'il existe une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ et $(y_{\varphi(n)})_n$ convergent vers un nombre réel $\ell \in [a,b]$.
(c) Déterminer la limite, quand n tend vers l'infini, de la quantité $|f(y_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})|$. Conclure.
19. Calculer $\displaystyle\int_{a^2}^{b^2} x\sqrt{(x-a^2)\,(b^2-x)}\mathrm{d}x$.
20. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose,
$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$
Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\exp\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.