Algèbre linéaire matricielle

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n est un entier fixé dans $\mathbb{N}^*$.

▶ Matrices dans une base

1. Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques *ad–hoc* :
   (a) $f : (x, y, z) \mapsto (x, y, 0) \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^3)$;
   (b) $g : (x, y) \mapsto (x - y, x + y, x + 2y) \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^3)$;
   (c) $h : (x, y, z) \mapsto x - 3y + 2z \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^3, \mathbb{K})$;
   (d) $i : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}' \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_3[X])$.
2. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y, y)$ et soient $\mathscr{B}_1 = ((1, 1), (0, 1))$ et $\mathscr{B}_2 = ((1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$. Justifier que $\mathscr{B}_1$ (resp. $\mathscr{B}_2$) est une base de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$) et déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$.
3. On pose $\mathscr{B} = (1, X + 1, 2X^2, X^3 + X)$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par par $f : P \mapsto P' - P$. Justifier que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
4. On considère l'application $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^3)$ canoniquement associée à la matrice
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Justifier que la famille $\mathscr{B} = ((1, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{K}^3$ et déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
   (b) Déterminer, à l'aide d'un changement de base, la matrice de f^n dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   On note f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A.
   (a) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathscr{C}$ soit D.
   (b) Déterminer une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ et calculer P^{-1}.
   (c) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) En déduire une expression du terme général des suites $(x_n)_n, (y_n)_n$ et $(z_n)_n$ définies par :
$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}.$$

▶ Rang, trace

6. Déterminer le rang des matrices suivantes (pour $m \in \mathbb{C}$) :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & m & -1 & 3 \\ m & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
7. Les matrices suivantes sont–elles équivalentes ?
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
8. Pour $n \geq 2$, déterminer le rang de la matrice $A = (i + j - 1)_{i,j \in [\![1,n]\!]}$.

9. Soit p un projecteur dans un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie. Démontrer que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.
10. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer les matrices $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $X + \mathrm{Tr}(X)A = 0$.
11. (a) Soient $i, j, k, \ell \in [\![1, n]\!]$; déterminer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$.
    (b) En déduire que si $f \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^*$ vérifie que $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f(AB) = f(BA)$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \mathrm{Tr}$.
12. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Démontrer qu'il existe deux familles non nulles de scalaires $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ telles que A soit semblable aux matrices

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_n \end{pmatrix}.$$

13. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $\mathrm{rg}(A^T A) = \mathrm{rg}(A)$.

▶ Systèmes linéaires

14. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{C}$, les systèmes suivants d'inconnues complexes :
(a) $\begin{cases} x - y + z &= m \\ x + my - z &= 1 \\ x - y - z &= 1 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} mx + y + z &= 1 \\ x + my + z &= m \\ x + y + mz &= m^2 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} mx + y + z + t &= 1 \\ x + my + z + t &= m \\ x + y + mz + t &= m + 1 \end{cases}$.
15. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts et soit $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}^3$. Démontrer que le système linéaire suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = u_1 \\ x + by + b^2 z = u_2 \\ x + cy + c^2 z = u_3 \end{cases}.$$

16. On considère, pour $m \in \mathbb{R}$, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + my + z = 0 \ \text{ et } \ mx + y - mz = 0\right\}$$

et

$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - my + z = 0\right\}.$$

    (a) Déterminer la dimension de F et G.
    (b) Calculer, selon la valeur de m, la dimension du sous-espace vectoriel $F \cap G$.

▶ Approfondissements

17. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^q = I_n$ pour un certain $q \geq 1$. Montrer que

$$\dim(\ker(A - I_n)) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{Tr}\left(A^k\right)$$

18. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v. de dimension finie est soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Déterminer le rang de l'endomorphisme $\tau : f \mapsto u \circ f \circ v$ de $\mathscr{L}(E)$.
19. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (f, g) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2, f \circ g + g \circ f = 0$$

    (a) Justifier qu'il existe $(p_1, p_2) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2$ tel que $p_1 + p_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$.
    (b) Montrer que p_1 et p_2 sont des projecteurs.
    (c) Montrer que $\dim \mathrm{F}_1 \leq (n - \mathrm{rg}(p_2))^2$ et $\dim \mathrm{F}_2 \leq (n - \mathrm{rg}(p_1))^2$.
    (d) Quel est le nombre de choix possibles pour le couple $(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2)$?
20. Démontrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ intersecte $GL_n(\mathbb{K})$.

▶ Exercices CCINP

$\boxed{59}$ Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n. On pose : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser une matrice de f.
   (b) en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$. *Indication :* si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

$\boxed{69}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.

$\boxed{71}$ Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.