Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 4 pages.

♦ Exercice CCINP

Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

♦ Problème : adapté de Centrale PC 2021

Dans tout ce sujet, a et b sont deux réels tels que $a<b$ et w est une fonction continue et strictement positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$; on dit que w est un ***poids*** *sur $[a,b]$.*

Étant donnée une fonction continue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, on cherche à approcher l'intégrale $\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x$ par une expression de la forme

$$I_n(f)=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j f\left(x_j\right),$$

où $n\in\mathbb{N},(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ et $x_0<x_1<\cdots<x_n$ sont $n+1$ points distincts dans $[a,b]$. Une telle expression $I_n(f)$ est appelée ***formule de quadrature*** *et on note*

$$e(f)=\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x-\sum_{j=0}^{n}\lambda_j f\left(x_j\right)$$

*l'****erreur de quadrature*** *associée. On remarque que e est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.*

On rappelle qu'un polynôme est dit unitaire si son coefficient dominant est 1 et pour tout entier $m\in\mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_m[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à m.

On dit qu'une formule de quadrature $I_n(f)$ est ***exacte*** *sur $\mathbb{R}_m[X]$ si,*

$$\forall P\in\mathbb{R}_m[X],\quad e(P)=0,$$

ce qui signifie que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à m,

$$\int_a^b P(x)w(x)\mathrm{d}x=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j P\left(x_j\right).$$

Enfin, on appelle ***ordre*** *d'une formule de quadrature $I_n(f)$ le plus grand entier $m\in\mathbb{N}$ pour lequel la formule de quadrature $I_n(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_m[X]$.*

– I –

Dans cette partie, on se place dans le cas $a=0$, $b=1$ et $\forall x\in[a,b]$, $w(x)=1$. On cherche donc à approcher $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ lorsque f est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ordre de la formule de quadrature $I_0(f)=f(0)$ et représenter graphiquement l'erreur associée $e(f)$.
2. Faire de même avec la formule de quadrature $I_0(f)=f\left(\frac{1}{2}\right)$.
3. Déterminer les coefficients $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2$ pour que la formule $I_2(f)=\lambda_0 f(0)+\lambda_1 f\left(\frac{1}{2}\right)+\lambda_2 f(1)$ soit exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$. Cette formule de quadrature est-elle d'ordre 2 ?

– II –

On revient au cas général et on fixe f une fonction continue sur $[a,b]$ et $x_0,\ldots,x_n \in [a,b]$ tels que $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.

1. Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto (P(x_0),\ldots,P(x_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. Montrer que, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$\forall j \in [\![0,n]\!], \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases}$$
3. Montrer que $(L_0,\ldots,L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette base est appelée **base de Lagrange** associée aux points $(x_0,\ldots,x_n)$.
4. Montrer que la formule de quadrature $I_n(f) = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si, et seulement si,
$$\forall j \in [\![0,n]\!], \quad \lambda_j = \int_a^b L_j(x)w(x)\mathrm{d}x.$$
5. On se place dans le cas $a=0$, $b=1$ et $\forall x \in [0,1], w(x)=1$. Déterminer la base de Lagrange associée aux points $\left(0,\frac{1}{2},1\right)$ et retrouver ainsi les coefficients de la formule de quadrature $I_2(f)$ de la question I.3.

– III –

Pour tout entier naturel m, on considère la fonction $\varphi_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_m(x,t) = \begin{cases} (x-t)^m & \textit{si } x \geq t, \\ 0 & \textit{si } x < t. \end{cases}$$

On observe que φ_m est continue si $m \geq 1$ et discontinue si $m=0$. On considère une formule de quadrature
$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)\ .$$
On note $m \in \mathbb{N}$ l'ordre de cette formule et on cherche à évaluer l'erreur associée :
$$e(f) = \int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)\,.$$
On suppose également que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^{m+1}$ sur $[a,b]$.

1. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $e(f) = e(R_m)$, où R_m est définie par
$$\forall x \in [a,b], \quad R_m(x) = \frac{1}{m!}\int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}t.$$
2. En déduire que, si $m \geq 1$,
$$e(f) = \frac{1}{m!}\int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}t,$$
où la fonction $K_m : [a,b] \to \mathbb{R}$ est définie par
$$\forall t \in [a,b], \quad K_m(t) = e\left(x \mapsto \varphi_m(x,t)\right) = \int_a^b \varphi_m(x,t)w(x)\mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_m(x_j,t)\,.$$
On pourra utiliser le résultat admis suivant : pour toute fonction continue $g : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$, on a
$$\int_a^b \left(\int_a^b g(x,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_a^b g(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t.$$
La fonction K_m est appelée **noyau de Peano** associé à la formule de quadrature. On admet que cette expression de $e(f)$ reste valable pour $m=0$.

– IV –

Dans cette partie, on suppose que $\forall x \in [a,b]$, $w(x) = 1$. On se place d'abord dans le cas $a = 0$, $b = 1$ et on considère la formule de quadrature

$$I_1(g) = \frac{g(0)+g(1)}{2},$$

qui est d'ordre $m = 1$ (on ne demande pas de le montrer).

1. Calculer le noyau de Peano associé K_1 et montrer que, pour toute fonction g de classe $\mathscr{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on a la majoration suivante de l'erreur de quadrature associée :

$$|e(g)| \leq \frac{1}{12} \sup_{x\in[0,1]} |g''(x)|.$$

On se replace maintenant dans le cas d'un segment quelconque, qu'on subdivise en $n+1$ points $a_0, \dots, a_n$ équidistants :

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad a_i = a + ih,$$

où $h = \frac{b-a}{n}$ est le pas de la subdivision. On considère alors la formule de quadrature

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2},$$

*appelée **méthode des trapèzes**. L'erreur de quadrature associée est notée :*

$$e_n(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f).$$

2. Représenter graphiquement $T_n(f)$.
3. On suppose que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$e_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e(g_i),$$

   où e est l'erreur associée à la formule de quadrature I_1 étudiée à la question 1 et les $g_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions à préciser.
4. En déduire la majoration d'erreur

$$|e_n(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

– V –

*On considère la suite $(b_n)_n$ des **nombres de Bernoulli** définie par $b_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 2$,*

$$\sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} b_p = 0.$$

On s'intéresse également aux polynômes B_n définis par

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad B_m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} b_k X^{m-k}.$$

On remarque que chaque polynôme B_m est unitaire de degré m et que, pour tout $m \in \mathbb{N}, B_m(0) = b_m$.

1. Calculer les valeurs de b_1, b_2, b_3 et b_4.

Dans toute la suite, on pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : pour tout entier $p \geq 1$, $b_{2p+1} = 0$.

2. Déterminer B_0, B_1, B_2 et B_3.
3. Montrer que, pour tout entier $m \geq 2, B_m(1) = b_m$, puis que, pour tout entier $m \geq 1, B'_m = mB_{m-1}$.

– VI –

Dans cette partie, on utilise les nombres b_m et les polynômes B_m définis dans la partie V pour établir un développement asymptotique à tout ordre de l'erreur de quadrature associée à la méthode des trapèzes (déjà étudiée dans la partie IV), pour une fonction suffisamment régulière. Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère une fonction $g : [0, n] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$.

1. Montrer que

$$\int_0^n g(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k) + g(k+1)}{2} - \int_0^n B_1(x - \lfloor x \rfloor) g'(x)\mathrm{d}x.$$

2. En déduire pour tout entier $m \geq 2$, le résultat suivant, appelé **formule d'Euler–Maclaurin** :

$$\int_0^n g(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k) + g(k+1)}{2} + \sum_{p=2}^{m} \frac{(-1)^{p-1} b_p}{p!} \left(g^{(p-1)}(n) - g^{(p-1)}(0) \right) + \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^n B_m(x - \lfloor x \rfloor) g^{(m)}(x)\mathrm{d}x.$$

On considère maintenant une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et la formule de quadrature déjà étudiée à la partie IV :

$$T_n(f) = h \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2},$$

(méthode des trapèzes), où $h = \frac{b-a}{n}$ et $\forall i \in [\![0, n-1]\!], a_i = a + ih$.

3. Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = T_n(f) - \sum_{p=1}^{m} \frac{\gamma_{2p}}{n^{2p}} + \rho_{2m}(n),$$

   où les coefficients γ_{2p} sont donnés par

$$\gamma_{2p} = \frac{(b-a)^{2p} b_{2p}}{(2p)!} \left(f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a) \right)$$

   et $\rho_{2m}(n)$ est un reste intégral vérifiant la majoration

$$|\rho_{2m}(n)| \leq \frac{C_{2m}}{n^{2m}}$$

   où C_{2m} est une constante à préciser ne dépendant que de m, a et b.

On a donc établi, pour tout entier $m \geq 1$, le développement asymptotique

$$T_n(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \frac{\gamma_2}{n^2} + \frac{\gamma_4}{n^4} + \cdots + \frac{\gamma_{2m}}{n^{2m}} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^{2(m+1)}} \right),$$

où les coefficients γ_{2p} sont indépendants de n.