

DÉTERMINANT

Dans toute la suite, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et n est un entier fixé dans \mathbb{N}^* .

► Groupe symétrique

1. Décomposer les permutations suivantes en produit de cycles de supports disjoints, puis en produit de transpositions :

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad (d) (26)(4215)(32)(315);$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 10 & 1 & 7 & 4 & 5 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}; \quad (e) (13)(3214)(314)(214).$$

$$(c) (1352)(2417)(58);$$

2. Déterminer la signature des permutations suivantes :

$$(a) (12)(34)(56); \quad (c) (15324)^{-1}; \quad (e) (13)(267)^{-1}(47312);$$

$$(b) (15324); \quad (d) (1324)^{37} \quad (f) ((13)(267)(47312))^{64}.$$

3. Montrer que toute permutation de \mathfrak{S}_n peut s'écrire comme produit de transpositions de la forme $(1i)$ avec $i \in [2, n]$.

4. Soit $(a_1 \dots a_k) \in \mathfrak{S}_n$ un cycle; exprimer simplement $\sigma(a_1 \dots a_k)\sigma^{-1}$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

► Calculs de déterminants

5. Calculer les déterminants suivants, pour $a, b, c \in \mathbb{K}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -17 & 21 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}.$$

6. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Exprimer le déterminant suivant sous la forme d'un produit de trois sinus :

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin(x) & \cos(x) \\ 1 & \sin(y) & \cos(y) \\ 1 & \sin(z) & \cos(z) \end{vmatrix}.$$

7. Calculer le déterminant suivant pour $a, b, c \in \mathbb{K}$:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c & a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b & 0 \\ \vdots & & \ddots & c & a & b \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}.$$

8. Pour $n \geq 3$, calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

9. Pour $a, b, c \in \mathbb{K}$, on pose

$$D(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & c & \dots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

Démontrer que la fonction $x \mapsto D(a+x, b+x, c+x)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à 1. En déduire la valeur de $D(a, b, c)$.

10. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $D \in GL_n(\mathbb{K})$.

(a) Déterminer $X, Y, Z, T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & X \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z & 0 \\ T & I_n \end{pmatrix}.$$

(b) En déduire que si $CD = DC$ alors :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC).$$

11. Calculer le déterminant de la matrice $\left(\binom{n+i}{j} \right)_{0 \leq i, j \leq p}$ pour $0 \leq p \leq n$.

12. On note $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont le coefficient en position (i, j) est

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on pose $D_n = \det(A_n)$.

(a) Écrire les matrices A_3, A_4 et A_5 .

(b) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(D_n)_n$. En déduire D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

► Applications du déterminant

13. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et on considère l'application $\Delta : f \mapsto f''$ ainsi que l'espace vectoriel $F = \text{Vect}(\sin, \cos, \text{sh})$.

(a) Justifier que F est de dimension finie, puis déterminer $\dim(F)$.

(b) Calculer $\det(\Delta)$. Que peut-on en déduire ?

(c) Résoudre sur F l'équation différentielle $y'' - y = 2\cos + 7\text{sh}$.

14. Soit E un \mathbb{K} -e.v de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . À quelle condition sur les scalaires $a, b \in \mathbb{K}$ la famille définie par

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad u_i = ae_i + be_{n+1-i}$$

est-elle une base de E ?

15. Démontrer que deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur \mathbb{C} sont semblables sur \mathbb{R} .

16. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f^3 + f = 0$.

(a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

On suppose désormais f non nul.

(b) Justifier l'existence d'un vecteur non nul u de $\text{Im } f$ et montrer que $f^2(u) = -u$.

(c) Démontrer que la famille $(u, f(u))$ est libre. Que peut-on en déduire sur $\text{rg } f$?

(d) On suppose que $\text{rg } f = 3$; établir que $f^2 = -\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ et que cela est absurde. Que peut-on en conclure sur les dimensions de $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$?

(e) Montrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

► Approfondissements

17. Déterminer le minimum et le maximum de l'application

$$f : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\sigma \mapsto \sum_{k=1}^n k\sigma(k).$$

18. *Quelques propriétés du groupe alterné.* On pose, pour $n \geq 2$:

$$\mathfrak{A}_n = \ker(\varepsilon) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}.$$

(a) Déterminer les groupes \mathfrak{A}_2 et \mathfrak{A}_3 .

(b) Démontrer que $\text{Card}(\mathfrak{A}_n) = \frac{n!}{2}$ et que pour tout $(\eta, \sigma) \in \mathfrak{A}_n \times \mathfrak{S}_n$, $\sigma\eta\sigma^{-1} \in \mathfrak{A}_n$.

On suppose désormais $n \geq 3$.

(c) Soient a_1, \dots, a_{n-2} et b_1, \dots, b_{n-2} deux familles d'entiers deux à deux distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Démontrer qu'il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket, \quad \sigma(a_i) = b_i.$$

(d) Soient $(\gamma, \delta), (\gamma', \delta') \in \mathfrak{S}_n$ deux paires de permutations de supports disjoints ; démontrer qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ telle que :

$$\sigma\gamma\delta\sigma^{-1} = \gamma'\delta'.$$

19. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

(a) Vérifier que $\det(A), \det(B) \in \mathbb{Z}$.

(b) On suppose que $\det(A) \wedge \det(B) = 1$; démontrer qu'il existe $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que :

$$AU + BV = I_n.$$

20. *Déterminant de Cauchy.* Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $a_i + b_i \neq 0$. Démontrer que :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{j=1}^n \prod_{i < j} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)}.$$

Indication : on pourra s'intéresser à la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$R = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_i - X)}{\prod_{i=1}^n (X + a_i)}$$

dans le cas où les a_i sont deux à deux distincts.

21. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; démontrer que $\det(A) \geq 0$.